

УДК 621.311

Н. С. Випанасенко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ З'ЄДНАНЬ СТАЛЕВИХ ДЕТАЛЕЙ

Створено математичну модель для аналізу нестационарного теплового процесу індукційного нагріву з'єднання деталей з метою їх демонтажу, яка відрізняється від відомих моделей тим, що враховується вплив розширення втулки на характер розвитку теплового процесу, реалізовано можливість розрахунку процесу за наявності в індукторі струму імпульсної форми.

Розгляд проблеми

Процес демонтажу циліндричних сталевих деталей, з'єднаних посадкою з натягом, можна здійснювати індукційним нагріванням втулки, що розташована на валу (рис. 1) [1].

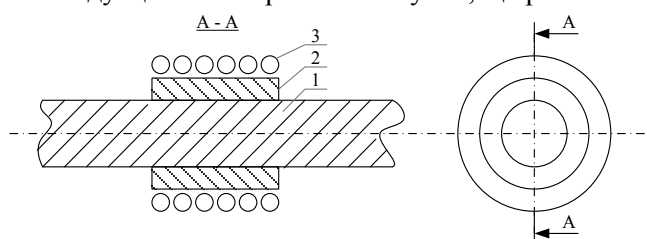


Рис. 1. Система «індуктор—тіло»:

1 — вал, 2 — втулка, 3 — обмотка індуктора

Переваги такого нагрівання полягають у тому, що демонтаж з'єднання здійснюється без пошкодження поверхні вала. Витрати електричної енергії у процесі демонтажу деталей є незначними. Характерна також висока технологічність операції. Надійність цієї операції у значній мірі залежить від характеру розташування джерел тепла на поверхні втулки, а, отже, від картини впливу електромагнітного поля. В [1] показано, що забезпечення рівномірності

нагрівання внутрішньої поверхні втулки і, відповідно, високої надійності процесу демонтажу, досягається створенням на поверхні втулки поздовжнього однорідного електромагнітного поля. При цьому витрати енергії на процес демонтажу мінімальні. Необхідність створення однорідного електромагнітного поля для виконання технологічної операції демонтажу визначає характер моделювання електромагнітних і, відповідно, теплових процесів, що виникають при нагріванні з'єднання. Система з'єднання деталей є осесиметричною, тому доцільно розглядати одномірну задачу, де параметри електромагнітного поля, а також процесу нагрівання змінюються уздовж радіуса циліндричного з'єднання. Це дещо спрощує завдання аналізу, дозволяє підійти до вирішення проблеми демонтажу із загальних позицій, розширити можливості для використання результатів виконаного аналізу. Аналіз одномірного електромагнітного поля виконаний в [1]. Задача сформульована таким чином, що підлягають визначенню параметри електромагнітного поля, які забезпечують ліквідацію натягу з'єднання в стаціонарному тепловому режимі. Виходячи з того, що номінальна потужність джерела живлення в запропонованому режимі ліквідації натягу буде мінімальною, його вартість також зменшиться. З урахуванням значної питомої вартості джерел живлення, створених на основі напівпровідникових перетворювачів частоти (при малій потужності джерела його вартість складає біля \$ 400 за один кВт), цей підхід є важливим і обґрунтованим.

Постановка завдання

Розвиток теплового процесу і його вихід на стаціонарний режим у значній мірі залежить від параметрів теплопередачі. Характерна особливість процесу в умовах демонтажу з'єднання деталей полягає в тому, що нагрів втулки супроводжується її розширенням, зменшенням натягу і, відповідно, зменшенням теплопередачі через зону контакту втулки з валом. В таких умовах необхідно дослідити вплив зміни цього параметру на характер розвитку теплового процесу, виключити можливість виникнення режиму, коли натяг не буде ліквідованим і операція демонтажу не буде вико-

наною.

Моделювання нестационарного теплового процесу важливе також з точки зору вибору доцільного алгоритму управління цим процесом, що здійснюється шляхом зміни параметрів електромагнітного поля, зокрема, як показано в [2], слід проаналізувати можливості використання імпульсної форми струму індуктора. В статті запропонована математична модель для аналізу нестационарного теплового процесу, який протікає в з'єднанні циліндричних деталей. Модель враховує викладені вище особливості теплового процесу і орієнтована на виконання сформульованих завдань.

Процес індуктивного нагріву втулки в однорідному поздовжньому магнітному полі описується одномірним диференціальним рівнянням теплопровідності в частинних похідних [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \frac{a}{\lambda} \omega, \quad (1)$$

де T — температура, °C; R — змінний радіус, м; a — температуропровідність $a = \lambda/(c\gamma)$, м²/с; t — час нагріву, с; λ — теплопровідність матеріалу втулки, Вт/(м·К); γ — щільність, кг/м³; c — питома теплоємність, Дж/(кг·К); ω — об'ємна щільність джерел тепла, розподілених в активному шарі, Вт/м³.

У рівнянні (1) фігурують дві незалежні змінні: радіус втулки R , та час її нагрівання t . Зміна температур уздовж радіуса втулки та в часі може бути визначена шляхом розв'язання цього рівняння. Будемо вважати, що об'ємна щільність джерел тепла ω в активному шарові однакова, тобто джерела тепла у цьому поверхневому шарові втулки розподілені рівномірно. Таке припущення є виправданим, оскільки аналіз процесу демонтажу втулки передбачає, у першу чергу, точний розрахунок температури віддаленої від джерел тепла внутрішньої поверхні втулки, яка впливає на ліквідацію натягу посадки. На рис. 2 показаний переріз втулки (ВТ) і вала (ВЛ), а також характерні позначки температур в °C зовнішньої (T_N), внутрішньої (T_0) поверхонь втулки, температури навколишнього середовища (T_C), внутрішнього ($R_{ВН}$) та зовнішнього (R_B) радіусів втулки. Точки «0» та «N» розташовані на внутрішній та зовнішній поверхнях втулки. Глибина активного шару ξ обмежує зону дії джерел тепла, зосереджених біля зовнішньої поверхні втулки.

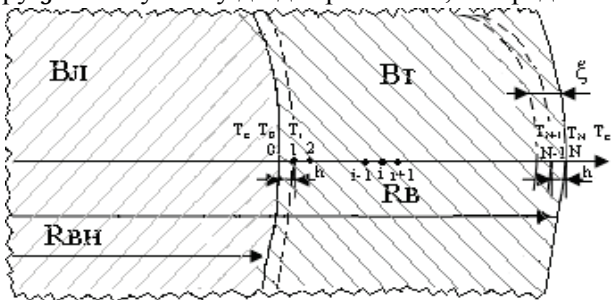


Рис. 2. Переріз втулки (ВТ) і вала (ВЛ)

Для розв'язання задачі рівняння (1) необхідно доповнити граничними та початковими умовами [4], що визначають її крайові умови. Будемо вважати, що теплообмін з внутрішньої та зовнішньої поверхонь втулки відбувається за законом Ньютона, тобто втрати тепла з цих поверхонь прямо пропорційні різницями температур між цими поверхнями та температурою навколишнього середовища. Аналіз такої залежності для температурних режимів демонтажу з'єднань деталей наведений в [1]. Тоді діючі граничні умови відповідають граничним умовам третього роду [4] і записуються відповідно для внутрішньої та зовнішньої поверхонь втулки у вигляді:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial R} = \alpha_B (T_0 - T_C); \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial R} = \alpha_3 (T_N - T_C), \quad (3)$$

де α_B , α_3 — коефіцієнти тепловіддачі відповідно з внутрішньої та зовнішньої поверхонь втулки.

В формулі (2) зроблено припущення про те, що температура вала в процесі індукційного нагріву не змінюється і дорівнює температурі зовнішнього середовища T_C . Таке припущення є прийнятним, бо вважається, що маса вала значна і він має значну площу контакту з навколишнім середовищем. Характерно те, що теплообмін втулки з валом здійснюється в умовах ліквідації натягу посадки. Ясно, що при зменшенні натягу в результаті розширення втулки коефіцієнт α_B зменшу-

ється і це призводить до відповідного зменшення теплового потоку. Моделювання цього процесу можливе, якщо в математичну модель ввести залежність α_B від різниці температур $(T_0 - T_C)$. Про можливість введення такої функціональної залежності йдеться в [4].

Права частина рівняння (1) відображає наявність джерел тепла на поверхні втулки. Значення ω може бути незмінним або змінюватись у часі. При використанні імпульсної форми струму індуктора регулюванням паузи між імпульсами створюють можливість для реалізації простого способу управління процесом нагріву [2]. Моделювання цього процесу пропонується здійснювати шляхом прирівнювання лівої частини виразу (1) до нуля в період паузи між імпульсами струму індуктора. Це еквівалентно виведенню з дії в цьому режимі джерел тепла. Для реалізації розрахунку при імпульсній формі струму індуктора в математичну модель доцільно ввести коефіцієнт L , що приймає значення «0» або «1». Значення $L = 1$ відповідає режиму протікання струму імпульсної форми, а $L = 0$ відповідає періоду паузи. Помноживши праву частину рівняння (1) на L , отримаємо $\frac{La}{\lambda} \omega$.

Слід зазначити, що за використання високочастотних імпульсів струму частота зміни значень коефіцієнта L висока. Це необхідно врахувати, вибираючи крок квантування процесу розрахунку температури нагріву втулки у часі.

Початкові умови характеризують розподіл температури в перетині втулки уздовж її радіуса. Виходячи з того, що початок нагріву характеризується однаковістю температур у всіх точках перетину, будемо вважати, що початкові умови відповідають температурі навколишнього середовища T_C .

Проаналізувавши особливості сформульованої задачі розрахунку теплового процесу, можна дійти висновку про її нелінійність. Нелінійність зумовлена залежністю коефіцієнта α_B від температури, а також введенням в рівняння теплопровідності коефіцієнта L , який змінюється у часі і приймає дискретні значення «0» або «1». Існують також і інші передумови нелінійності теплового рівняння та рівнянь, що відповідають граничним умовам. Вони пов'язані із залежністю теплофізичних властивостей сталі від температури. Мова йде, наприклад, про теплосмість та теплопровідність матеріалу втулки. Виходячи із того, що нагрів з'єднання деталей здійснюється в обмеженому діапазоні температур (до 300 °C) будемо вважати, що ці параметри змінюються у незначній мірі і, моделюючи процес, можна користуватися середніми значеннями в заданому діапазоні температур.

Виходячи із нелінійності рівняння (1) та граничних умов (2), (3), для розв'язування задачі доцільно використати чисельний метод розрахунку. Числові методи дозволяють достатньо точно врахувати наявні нелінійності, зв'язувати параметри, які підлягають зміні, з температурою або часом нагріву безпосередньо в період розрахунку теплового процесу.

Обґрунтування результатів

Найбільш універсальними числовими методами розв'язання задач, для яких відомі крайові умови та рівняння теплопровідності є різницеві методи [5]. Застосовуючи кінцево-різницеві методи область безперервної зміни координат в просторі та часі замінюється областю їх дискретної зміни у вузлах сітки. Замість диференціальних операторів вводяться різницеві [3]. На рис. 2 показана одномірна сітка, розташована поздовж радіуса втулки R . Сітка має $N + 1$ вузлів. Кількість інтервалів сітки (кроків) дорівнює N . Уведена змінна i , яка визначає координати вузлів ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). Крок сітки дорівнює h . Уведемо сітку для іншої змінної — параметра t . Позначимо змінною k номер кроку в часі. Тоді $t_k = k\Delta t$, де Δt — крок сітки в часі, $k = 0, 1, 2, \dots$. У вузлах сітки будемо визначати функцію T_i^k (температуру в °C), що є дискретним аналогом безперервної функції $T(R, t)$ в рівнянні (1). Замінивши часткові похідні першого та другого порядків в рівнянні (1) різницеви похідними відповідно до [3, 5], отримаємо:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} - a \left(\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right) - \frac{a}{R_i} \left(\frac{T_{i+1}^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{2h} \right) = \frac{La}{\lambda} \omega_i^{k+1}. \quad (4)$$

Граничні умови, що відповідають рівнянням (2) та (3), у вигляді різницевих рівнянь наведені нижче

$$-\lambda \left(\frac{T_0^{k+1} - T_1^{k+1}}{h} \right) = \alpha_B^{k+1} (T_0^{k+1} - T_C); \quad (5)$$

$$-\lambda \left(\frac{T_N^{k+1} - T_{N-1}^{k+1}}{h} \right) = \alpha_3 (T_N^{k+1} - T_C). \quad (6)$$

Тут враховано, що коефіцієнт тепловіддачі α_B^{k+1} залежить від різниці температур $(T_0^{k+1} - T_C)$ і, відповідно, змінюється у часі. Слід також пам'ятати, що зміна значень в часі коефіцієнта L повинна співпадати з наперед визначеними вузлами сітки в часі T_k , що відповідають тривалості імпульсів струму індуктора та їх періодичності появи. Це здійснюється шляхом вибору таких значень Δt , при яких окремі вузли сітки в часі співпадають із вказаними проміжками часу.

Якщо розглядається варіант постійної дії джерел тепла (струм індуктора синусоїдальний), то L в часі не змінюється і дорівнює одиниці. Початкові умови задачі мають вигляд: $T_i^0 = T_C$.

Об'ємна щільність джерел тепла може бути визначеною через питому поверхневу потужність P_0 [3].

$$\omega = \frac{P_0}{\xi} \frac{2R_B}{2R_B - \xi}, \quad (7)$$

де ξ — глибина активного шару (рис. 2), яка визначається залежністю, наведеною в [3].

Якщо вважати, що глибина активного шару, де зосереджена дія струму на поверхні втулки, $\xi \ll R_B$, то (7) можна спростити

$$\omega = \frac{P_0}{\xi}. \quad (8)$$

Визначення дискретної функції об'ємної щільності у вигляді ω_i^k дозволяє урахувати відсутність джерел тепла в зонах, де $R < R_B - \xi$. Зрозуміло, що крок сітки h по параметру R слід вибрати таким, щоб вузол сітки співпав із значенням $R = R_B - \xi$. Це дозволить чітко зафіксувати зону дії джерел тепла. Залежність параметра ω від k дозволяє моделювати процеси з постійними, а також змінними значеннями P_0 в часі, що розширює можливості створеної моделі.

Видно, що різницева схема, складена з рівнянь (4), (5), (6) та визначених початкових умов, відноситься до неявних схем, де по значенням температури на попередньому кроці T_i^k визначаються з неявних формул значення температури на наступному кроці T_i^{k+1} . Для розрахунку T_i^{k+1} розв'язують систему алгебраїчних рівнянь. Розв'язування системи здійснюються методом прогону [5]. Характерно те, що неявні схеми забезпечують абсолютну стійкість розрахунку, під якою розуміють властивість різницевої схеми, яка приводить до зменшення, або, у крайньому випадку, до ненакопичення помилки, пов'язаної з похибкою визначення крайових умов та похибками округлення значень змінних у процесі розрахунку.

Метод прогону передбачає представлення рівняння (4) для кожного кроку розрахунку температури в перерізі втулки в залежності від часу у вигляді

$$A_i T_{i-1}^{k+1} - C_i T_i^{k+1} + B_i T_{i+1}^{k+1} = -F_i^{k+1}. \quad (9)$$

Зведення рівняння (4) до вигляду (9) дозволяє визначити коефіцієнти

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{a}{h} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2R_i} \right); & B_i &= -\frac{a}{h} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2R_i} \right); \\ C_i &= -\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2a}{h^2} \right); & F_i^{k+1} &= -\left(\frac{T_i^k}{\Delta t} + \frac{a}{\lambda} \omega_i^{k+1} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

де $R_i = R_{BH} + ih$.

Значення ω_i^{k+1} визначають із умов

$$\omega_i^{k+1} = \begin{cases} \frac{P_0}{\xi} \cdot \frac{2R_B}{2R_B - \xi}, & \text{якщо } i \geq N - \frac{\xi}{h}; \\ 0, & \text{якщо } i < N - \frac{\xi}{h}. \end{cases} \quad (11)$$

В результаті прямого ходу прогону визначають коефіцієнти прогону $(a_{i+1}^{k+1}, b_{i+1}^{k+1})$ для значень $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ [6]

$$a_{i+1}^{k+1} = \frac{B_i}{C_i - a_i^{k+1} \cdot A_i}; \quad b_{i+1}^{k+1} = \frac{A_i b_i^{k+1} + F_i^{k+1}}{C_i - a_i^{k+1} \cdot A_i}. \quad (12)$$

Значення коефіцієнтів прогону a_1^{k+1} та b_1^{k+1} отримують із граничної умови (5), що стосується поверхні з'єднання вала зі втулкою. Для цього рівняння (5) представляють у вигляді [6]

$$T_0^{k+1} = a_1^{k+1} T_1^{k+1} + b_1^{k+1}. \quad (13)$$

Звідси отримаємо

$$a_1^{k+1} = \frac{\frac{\lambda}{h}}{\frac{\lambda}{h} + \alpha_B^{k+1}}; \quad b_1^{k+1} = \frac{\alpha_B^{k+1}}{\frac{\lambda}{h} + \alpha_B^{k+1}} T_C. \quad (14)$$

Коефіцієнти χ_N та μ_N отримаємо із граничної умови (6). Для цього це рівняння записують у вигляді [6]

$$T_N^{k+1} = \chi_N T_{N-1}^{k+1} + \mu_N. \quad (15)$$

Отримаємо

$$\chi_N = \frac{\frac{\lambda}{h}}{\frac{\lambda}{h} + \alpha_3}; \quad \mu_N = \frac{\alpha_3}{\frac{\lambda}{h} + \alpha_3} T_C. \quad (16)$$

Звертаємо увагу на те, що значення α_3 прийнято таким, що залишається незмінним у часі (не залежить від температури нагріву втулки).

Значення температури на поверхні втулки [6]

$$T_N^{k+1} = \frac{\mu_N + \chi_N b_N^{k+1}}{1 - a_N^{k+1} \chi_N}. \quad (17)$$

В результаті зворотного ходу методу прогону визначають значення температур T_i^{k+1} . При цьому параметр i приймає значення $i = N-1, N-2, \dots, 1$ °C [6].

$$T_i^{k+1} = a_{i+1}^{k+1} \cdot T_{i+1}^{k+1} + b_{i+1}^{k+1}. \quad (18)$$

Слід пам'ятати, що цикл розрахунку по змінній k є зовнішнім відносно до циклу по i .

Таким чином, розроблена математична модель для дослідження нестационарного теплового режиму нагрівання втулки, з'єднаної з валом, яка дозволяє визначити значення температур в перетині вала в залежності від часу його нагріву. При цьому враховуються особливості контакту вала із втулкою. Задача подальшого дослідження полягає в отриманні практичних результатів розрахунків з урахуванням розширення втулки і поступовою ліквідацією натягу посадки, а також у встановленні залежності між коефіцієнтом тепловіддачі α_B і різницею температур $(T_0 - T_C)$, що дозволить точніше моделювати тепловий процес.

Висновки

1. Реалізація однорідного поздовжнього магнітного поля, що діє на втулку, дозволяє нестационарний процес індукційного нагріву з'єднання описати одномірним диференціальним рівнянням теплопровідності другого порядку в частинних похідних.

2. Нелінійність рівняння теплопровідності та граничних умов обумовлює використання числового методу розрахунку теплового процесу з формуванням кінцево-різницевого рівняння та застосуванням методу прогону.

3. Розроблена математична модель нестационарного теплового процесу індукційного нагріву з'єднання деталей для їх демонтажу, яка відрізняється від відомих моделей тим, що враховується вплив розширення втулки на характер теплового процесу, реалізована можливість розрахунку процесу за наявності в індукторі струму імпульсної форми. Обґрунтовані припущення, як покладені в основу в математичній моделі.

4. Запропоновано вплив імпульсного струму індуктора моделювати шляхом відповідного введення та виведення джерел тепла, зосереджених у поверхневому шарі втулки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Выпанасенко Н. С. Индукционный нагрев цилиндрических соединений деталей при их демонтаже / Н. С. Выпанасенко // Гірнична електромеханіка та автоматика: Наук.-техн. зб. — 2006. — Вип.77. — С. 129—135.
2. Выпанасенко Н. С. Анализ способов управления индукционным нагревом цилиндрических соединений при их демонтаже / Н. С. Выпанасенко // Збірник наукових праць Національного університету кораблебудування. — 2007. — Вип. 3. — С. 123—128.
3. Установка индукционного нагрева : учебное пособие для вузов / под ред. А. Е. Слухоцкого ; [А. Е. Слухоцкий, В. С. Немков, Н. А. Павлов, А. В. Бамуэр]. — Л.: Энергоатомиздат. Ленинград. отд-ние., 1981. — 328 с.
4. Немков В. С. Теория и расчет устройств индукционного нагрева / В. С. Немков, В. Б. Демидович. — Л. : Энергоатомиздат. Ленинград. отд-ние, 1988. — 280 с.
5. Немков В. С. Математическое моделирование на ЭВМ устройств высокочастотного нагрева / В. С. Немков, Б. С. Полеводов. — Л. : Машиностроение. Ленинград. отделение, 1980. — 64 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 656 с.

Рекомендовано кафедрою електротехнічних систем електроспоживання та енергетичного менеджменту

Надійшла до редакції 9.10.09
Рекомендована до друку 4.12.09

Выпанасенко Наталья Станіславівна — аспірант кафедри систем електропостачання.
Національний гірничий університет, м. Дніпропетровськ