

ГРАДІЄНТНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДВОПАРАМЕТРИЧНОЇ ВІКОННОЇ ФУНКЦІЇ НАЙКВІСТА ДЛЯ ЗМЕНШЕННЯ ПОЗАСМУГОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В OFDM СИСТЕМІ

¹Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса

Досліджено зв'язок між імпульсами Найквіста у часовій області і віконними функціями Найквіста, які застосовуються у технології мультиплексування з ортогональним частотним поділом каналів (OFDM). Проаналізовано один зі способів апроксимації перехідної області віконних функцій Найквіста з використанням кусково-лінійних функцій. Цей спосіб дозволив збільшити кількість ступенів свободи сигналу через введення двох додаткових параметрів. Визначена спектральна щільність вибраної двопараметричної віконної функції Найквіста. Виконана оптимізація синтезованого сигналу за критерієм мінімуму енергії у перших бічних пелюстках його спектральної щільності. Для розв'язання оптимізаційної задачі вибрано метод градієнтного спуску з мінімізацією функції на кожному етапі ітерації методом золотого перетину. У середовищі програмування MATLAB створена програма, яка працює за алгоритмом оптимізації. За допустимої максимальної відносної помилки $\varepsilon_{\text{доп}} = 10^{-3}$ кількість ітерацій градієнтного методу пошуку становила 2 ітерації. Встановлено, що за оптимальних значень параметрів сигналу кількість енергії, зосередженої у перших трьох бічних пелюстках його спектральної щільності, на 12,6 дБ менше ніж для прямокутної віконної функції. У роботі подані графіки для синтезованої віконної функції з оптимальними параметрами у часовій та частотній області. Застосування двопараметричної віконної функції Найквіста зі зниженим рівнем спектральної щільності бічних пелюсток дозволяє зменшити рівень позасмугового випромінювання OFDM сигналу, а також підвищити стійкість системи з багатьма піднесучими до частотних зсувів, зумовлених взаємним рухом передавача і приймача. Варто зазначити, що запропонований алгоритм градієнтного пошуку є універсальним і може бути використаний для оптимізації віконних функцій Найквіста за різних критеріїв і незалежно від кількості параметрів сигналу.

Ключові слова: OFDM, імпульс Найквіста, віконна функція Найквіста, енергія, оптимізація, метод градієнтного спуску.

Вступ

Системи зв'язку, основані на технології OFDM, широко використовуються у сучасному світі. До них відносяться стільникові мобільні мережі четвертого та п'ятого покоління, Wi-Fi, системи цифрового радіомовлення та ін. [1]. Основними перевагами технології OFDM є підвищена спектральна ефективність через перекриття сусідніх каналів у частотній області, а також підвищена стійкість роботи в умовах багатопробного каналу зв'язку.

Для OFDM сигналів характерним є підвищений рівень бічних пелюсток спектральної щільності. Високий рівень позасмугового випромінювання може створювати завади сусіднім радіослужбам, до всього погіршується завадостійкість системи за частотних зсувів між передавачем і приймачем. Відомо, що спектральна щільність OFDM сигналу залежить від форми віконної функції [2], [3]. Тому пошук віконних функцій з мінімальною енергією бічних пелюсток є актуальною проблемою. Одним зі способів розв'язання цієї задачі є багатопараметрична апроксимація віконної функції. Зміна параметрів дозволяє конструювати сигнали з необхідними властивостями. У роботі запропонована двопараметрична віконна функція Найквіста з кусково-лінійною апроксимацією.

Метою статті є оптимізація багатопараметричної віконної функції Найквіста за критерієм мінімуму енергії, зосередженої у перших трьох бічних пелюстках її спектральної щільності, з використанням методу градієнтного спуску. Вибір цього методу зумовлений тим, що з його застосу-

ванням пошук оптимальних параметрів сигналу відбувається за найкоротшим шляхом.

Основна частина

З теорії сигналів Найквіста [4] відомо, що для уникнення міжсимвольної інтерференції (ISI) повинна виконуватись умова

$$s_{zero\ ISI}(t) = \begin{cases} U, & |t| = 0, \\ 0, & |t| = T, 2T, 3T \dots, nT. \end{cases} \quad (1)$$

Для OFDM системи необхідним є уникнення міжканальної інтерференції (ICI) [5], яке може бути подане у вигляді

$$S_{zero\ ICI}(f) = \begin{cases} UT, & |f| = 0, \\ 0, & |f| = 1/T, 2/T, 3/T \dots, n/T. \end{cases} \quad (2)$$

Вирази (1) і (2) є дуальними, в результаті чого (2) може бути виражене через (1)

$$S_{zero\ ICI}(f) = T s_{zero\ ISI}(f \cdot T^2). \quad (3)$$

З дуальних властивостей перетворення Фур'є [6] можна записати

$$s_{zero\ ICI}(t) = \frac{1}{T} S_{zero\ ISI}(-t/T^2). \quad (4)$$

Якщо права частина виразу (4) є парною функцією, остаточно можна записати

$$s_{zero\ ICI}(t) = \frac{1}{T} S_{zero\ ISI}(t/T^2). \quad (5)$$

Вирази (3)—(5) дозволяють перейти від традиційних сигналів Найквіста до віконних функцій Найквіста для OFDM-системи. Відомо [4], що сигнали Найквіста характеризуються непарною симетрією у перехідній області спектральної щільності. Одним зі способів синтезу нових класів сигналів Найквіста є апроксимація перехідної області кусково-лінійними функціями. Така апроксимація дозволяє ввести у сигнал нові параметри, змінюючи які можна виконувати оптимізацію сигналу за необхідними критеріями. Розглянемо наведений у [4] двопараметричний селективний сигнал, спектральна щільність якого подана як

$$S(\omega) = \begin{cases} UT, & 0 \leq |\omega| < \omega_A, \\ (1-\beta)UT, & \omega_A \leq |\omega| < \omega_C, \\ \beta UT, & \omega_C \leq |\omega| < \omega_B, \\ 0, & |\omega| \geq \omega_B, \end{cases} \quad (6)$$

де $\omega_A = (1-\alpha)\omega_C$; $\omega_B = (1+\alpha)\omega_C$; $\omega_C = \pi/T$; $0 \leq \alpha \leq 1$; $0 \leq \beta \leq 1$.

Спектральній щільності (6) відповідає сигнал:

$$s(t) = U \operatorname{sinc}(\omega_C t) [1 - 2\beta(1 - \cos(\alpha\omega_C t))]. \quad (7)$$

Синтезуємо з (6) віконну функцію Найквіста, використовуючи (5) і враховуючи, що $\omega = 2\pi f$

$$s(t) = \begin{cases} U, & 0 \leq |t| < t_A, \\ (1-\beta)U, & t_A \leq |t| < t_C, \\ \beta U, & t_C \leq |t| < t_B, \\ 0, & |t| \geq t_B, \end{cases} \quad (8)$$

де $t_A = (1-\alpha)t_C$; $t_B = (1+\alpha)t_C$; $t_C = T/2$; $0 \leq \alpha \leq 1$; $0 \leq \beta \leq 1$.

Відповідно, спектральну щільність (9) можна знайти з (7), використовуючи (3):

$$S(\omega) = UT \operatorname{sinc}(t_C \omega) [1 - 2\beta(1 - \cos(\alpha t_C \omega))]. \quad (9)$$

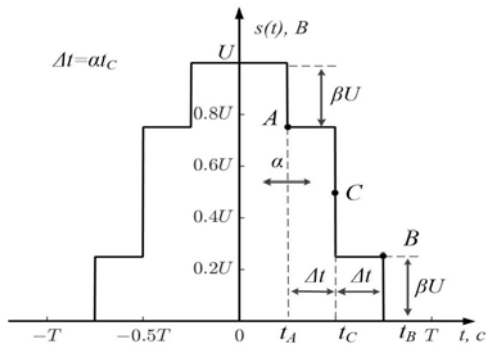


Рис. 1. Двопараметрична віконна функція Найквіста



Рис. 2. Блок-схема алгоритму градієнтного спуску: $f(\alpha, \beta)$ — цільова функція; α_k, β_k — параметри, за якими відбувається оптимізація; λ — кроковий множник; $\epsilon_{\text{доп}}$ — критерій зупинки градієнтного спуску

На рис. 1. показана віконна функція, яка відповідає (8).

Для OFDM системи критичним є низький рівень бічних пелюсток спектральної щільності сигналу. Зменшення рівня бічних пелюсток дозволяє зменшити енергію позасмугового випромінювання. Додатково покращується стійкість роботи системи до частотних зсувів, обумовлених ефектом Доплера.

Велика кількість енергії всього сигналу зосереджена в його перших пелюстках спектральної щільності. Визначимо параметри вибраної функції Найквіста, за яких в перших трьох бічних пелюстках спектральної щільності, обмежених частотним інтервалом $\Delta f = [1/T; 4/T]$, знаходиться найменша кількість енергії. Енергія, зосереджена у смузі частот, визначається за допомогою виразу [7]:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/T}^{2\pi/T} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (10)$$

Для визначення оптимальних параметрів α та β скористаємось методом градієнтного спуску з поділом кроку методом золотого перетину [8], [9]. Цей метод дозволяє швидко перейти до мінімуму функції (10), оскільки пошук відбувається за найкоротшим шляхом у порівнянні з іншими методами пошуку, до прикладу, методом покоординатного спуску. Алгоритм градієнтного спуску, застосований у цій роботі, показаний на рис. 2.

В результаті отримані значення параметрів $\alpha_{\text{опт}} = 0,43$ та $\beta_{\text{опт}} = 0,32$. Перевірити правильність пошуку оптимальних параметрів α та β з використанням вибраного методу можна, побудувавши у MATLAB [10] поверхню залежності нормованої енергії перших трьох бічних пелюсток спектральної щільності віконної функції Найквіста від параметрів α та β (рис. 3).

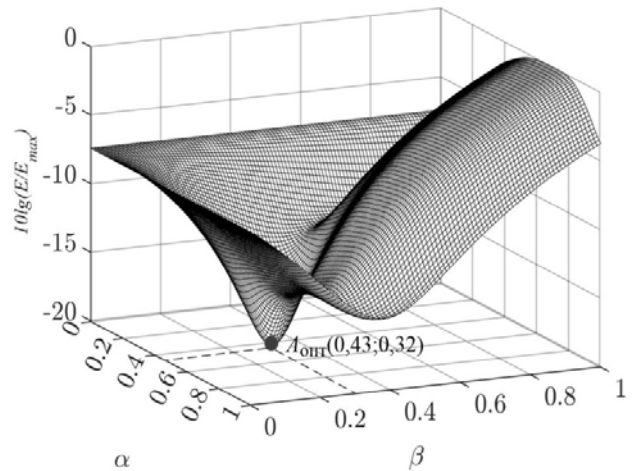


Рис. 3. Залежність нормованої енергії перших трьох бічних пелюсток спектральної щільності віконної функції Найквіста від параметрів α та β

Аналіз рис. 3 показує, що функція містить одне мінімальне значення, якщо $\alpha = 0,43$ та $\beta = 0,32$. За цих значень параметрів енергія бічних пелюсток на 20 дБ нижче, ніж в найгіршому випадку, якому відповідають значення параметрів $\alpha = 0,73$ та $\beta = 1$. Також енергія бічних пелюсток на 12,6 дБ менше ніж для прямокутного імпульсу, якому відповідає значення параметра $\alpha = 0$. На рис. 4 показані графіки віконної функції Найквіста з оптимальними параметрами для часової та частотної областей.

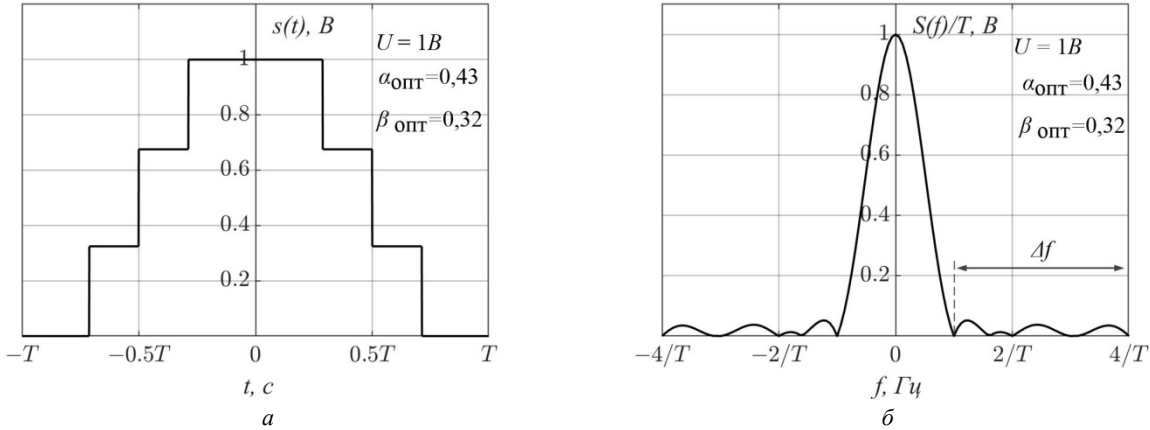


Рис. 4. Оптимальна двопараметрична віконна функція Найквіста: *a* — у часовій; *b* — у частотній областях

Висновки

Синтезована двопараметрична кусково-лінійна віконна функція Найквіста, що підходить для застосування в OFDM-системі. Виконана оптимізація параметрів отриманого сигналу за критерієм мінімуму енергії у перших трьох бічних пелюстках спектральної щільності з використанням градієнтного методу пошуку з поділом кроку. Результати показали, що мінімум спектральної щільності спостерігається, коли $\alpha_{\text{опт}} = 0,43$ та $\beta_{\text{опт}} = 0,32$. За таких значень параметрів енергія, зосереджена в перших трьох бічних пелюстках, на 12,6 дБ нижча ніж для прямокутного імпульсу. За максимально допустимою відносною помилки $\varepsilon_{\text{доп}} = 10^{-3}$ пошук оптимальних параметрів відбувся за 2 ітерації. Варто зазначити, що наведений у роботі метод оптимізації є універсальним, адже його реалізація не залежить від кількості параметрів у сигналі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Andreas F. Molisch, *Wireless communications*. Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd, 2011, 827 p.
- [2] P. Tan, and N. C. Beaulieu, "Analysis of the effects of Nyquist pulse-shaping on the performance of OFDM," *European Transactions on Telecommunications*, 20, pp. 9-22, 2009. <https://doi.org/10.1002/ett.1316>.
- [3] N. C. Beaulieu, C. C. Tan, and M. O. Damen, "A 'better than' Nyquist pulse," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 9, pp. 367-368, Sep. 2001. <https://doi.org/10.1109/4234.951379>.
- [4] Э. А. Сукачѳв, *Введение в теорию сигналов Найквиста*. Одесса, Украина: Освіта України, 2016, 108 с.
- [5] H. F. Arrano, and C. A. Azurdia-Meza, "ICI reduction in OFDM systems using a new family of Nyquist-I pulses," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 11, pp. 3556-3561, Nov 2015. <https://doi.org/10.1109/TLA.2015.7387930>.
- [6] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [7] Э. А. Сукачѳв, и Д. Ю. Бухан, *Корреляционный анализ детерминированных сигналов*. Одесса, Украина: Освіта України, 2014, 134 с.
- [8] Б. Банди, *Методы оптимизации. Вводный курс*. М.: Радио и связь, 1988, 128 с.
- [9] А. В. Аттетков, С. В. Галкин, и В. С. Зарубин, *Методы оптимизации*. М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003, 440 с.
- [10] А. Б. Сергиенко, *Цифровая обработка сигналов*. Санкт-Петербург, Россия: Питер, 2003, 608 с.

Рекомендована кафедрою інформаційних радіоелектронних технологій і систем ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 16.05.2022

Биков Ростислав Геннадійович — аспірант кафедри бездротових та супутникових мереж електронних комунікацій, e-mail: rbykov@ukr.net .

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса

Two-Parameter Gradient Optimization of Nyquist Window Function for Reduction of Out-Of-Band Emission in OFDM System

¹State University of Intelligent Technologies and Communications, Odesa

The relationship between Nyquist pulses in the time domain and Nyquist window functions used in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) technology has been investigated. One of the ways to approximate the transition region of Nyquist window functions using piecewise linear functions has been analyzed. This method allowed increasing the number of degrees of signal freedom through the introduction of two additional parameters. The spectral density of the selected two-parameter Nyquist window function has been determined. Optimization of the synthesized signal by the criterion of minimum energy in the first side lobes of its spectral density has been performed. To solve the optimization problem, the gradient descent method with minimization of the function at each stage of the iteration by the golden section method is chosen. In the MATLAB programming environment, program has been created that works according to the selected optimization algorithm. With the maximum allowable relative error $\varepsilon = 10^{-3}$, the number of iterations of the gradient search method is 2 iterations. It is established that at the optimal values of the signal parameters the amount of energy concentrated in the first three side lobes of its spectral density is 12.6 dB less than for the rectangular window function. The graphs for the synthesized window function with optimal parameters in time and frequency domain are given in this paper. The use of the two-parameter Nyquist window function with reduced level of spectral density of the side lobes allows reducing the level of out-of-band radiation of the OFDM signal and increasing the resistance of the system with many subcarriers to frequency offsets caused by the mutual movement of the transmitter and receiver. It should be noted that the chosen gradient search algorithm is universal and can be used to optimize the Nyquist window functions by different criteria and regardless of the number of signal parameters.

Keywords: OFDM, Nyquist pulse, Nyquist window function, energy, optimization, gradient descent method.

Bykov Rostyslav G. — Post-Graduate Student of the Chair of Wireless and Satellite Electronic Communications Networks, e-mail: rbykov@ukr.net