

М. С. Сегеда<sup>1</sup>  
 П. Ф. Гоголюк<sup>1</sup>  
 Ю. В. Близняк<sup>1</sup>

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОЧАТКОВОГО РОЗПОДІЛУ ІМПУЛЬСУ ПЕРЕНАПРУГИ В ДВООБМОТКОВИХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка»

*Розроблено математичну модель для дослідження початкового розподілу напруги вздовж обмоток двообмоткового трансформатора під час дії на них імпульсної перенапруги прямокутної форми. Математична модель для дослідження імпульсних процесів в обмотках двообмоткових трансформаторів сформована на підставі запропонованої заступної схеми нескінченно малого елемента довжини двообмоткового трансформатора з урахуванням електромагнітних зв'язків між обмотками, поздовжніх і поперечних взаємних індуктивних зв'язків між витками обмоток й потокозчеплення від основного магнітного потоку магнітопроводу у вигляді системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. В процесі розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними необхідно знаходити початкові та граничні умови. Отже виникає потреба визначення початкового розподілу напруги вздовж обмоток під час дії на них імпульсної перенапруги. Згідно з принципом неперервності струму отримано систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для заступної схеми нескінченно малого елемента трансформатора з урахуванням тільки ємнісних елементів, позаяк струми в індуктивностях не можуть змінюватися стрибком. На підставі модифікованої заступної схеми нескінченно малого елемента двообмоткового трансформатора розроблена математична модель для дослідження початкового розподілу напруги вздовж його обмоток шляхом розв'язання сформованої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують початковий розподіл напруги вздовж обмоток двообмоткового трансформатора. Уперше отримано початковий розподіл напруги вздовж обмоток двообмоткового трансформатора під час дії імпульсу перенапруги прямокутної форми, що вирішує проблему визначення початкових умов для крайової задачі під час розрахунку швидкоплинних хвильових процесів. Розв'язання крайової задачі методами класичної математичної фізики дозволяє надати чіткий математичний зміст формальним обчисленням. Наведено підхід до визначення сталих інтегрування системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.*

**Ключові слова:** хвильовий процес, математична модель, трансформатор, диференціальні рівняння з частинними похідними, початкові та граничні умови, початковий розподіл напруги.

### Вступ

Досі дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів здійснювалося на підставі математичних моделей, які формувалися для однієї обмотки без врахування електромагнітних зв'язків між обмотками, взаємного зв'язку між витками обмоток та основного магнітного потоку [1], [2]. В роботі [3] наведено заступну схему однієї обмотки трансформатора, на підставі якої сформовано математичну модель і досліджено початковий розподіл напруги вздовж обмотки трансформатора.

В багатьох роботах [4], [5] внутрішні перехідні процеси в обмотках трансформаторів описуються звичайними диференціальними рівняннями з допущенням лінійного розподілу напруги вздовж обмоток.

На сьогодні розроблені математичні моделі для дослідження хвильових процесів в двообмоткових трансформаторах на підставі заступної схеми з урахуванням основного магнітного потоку, власних і взаємних міжобмоткових та взаємних міжвиткових зв'язків [6]—[8]. Рівняння, які описують хвильові процеси в двообмоткових трансформаторах, є в часткових похідних і для їх розв'язання необхідно формувати початкові та граничні умови. Одним зі станів такого математич-

ного аналізу є визначення початкового розподілу напруг вздовж обмоток за дії на них імпульсу перенапруги [9].

Метою роботи є розроблення математичної моделі для дослідження початкового розподілу напруг вздовж обмоток двообмоткових трансформаторів за дії на них імпульсної напруги.

### Результати досліджень

Математична модель двообмоткового трансформатора розроблена на підставі заступної схеми, показаної на рис. 1 [6].

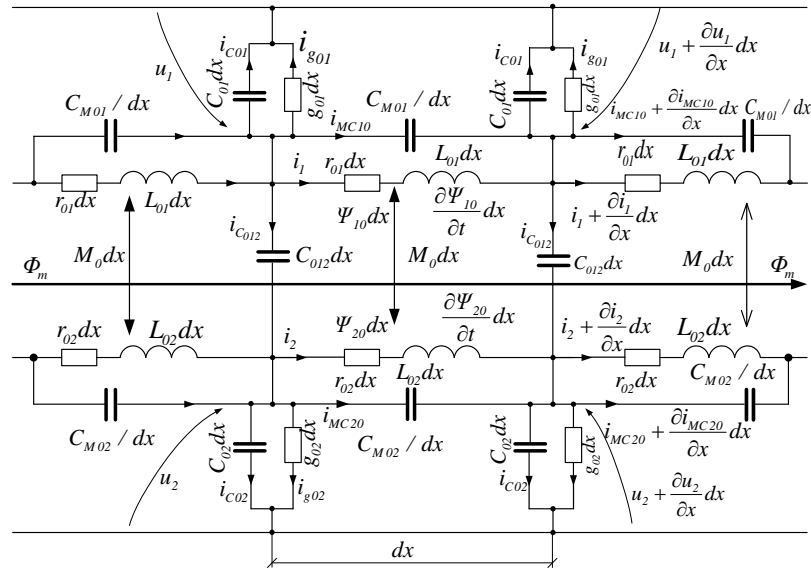


Рис. 1. Заступна схема двообмоткового трансформатора на одиницю довжини  $dx$  вздовж осей обмоток

Рівняння зміни струмів обмоток записуємо на підставі першого закону Кірхгофа

$$-\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial x} = g_{01}u_1(x,t) + (C_{01} + C_{012})\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - C_{012}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - C_{M01}\frac{\partial^3 u_1(x,t)}{(\partial x^2 \partial t)}; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial x} = g_{02}u_2(x,t) + (C_{02} + C_{012})\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - C_{012}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - C_{M02}\frac{\partial^3 u_2(x,t)}{(\partial x^2 \partial t)}. \quad (2)$$

Рівняння спаду напруги на одиницю довжини обмоток записуємо на підставі другого закону Кірхгофа

$$-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = r_{01}i_1(x,t) + L_{01}\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + M_0\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + \int_0^x M_1(x,s)\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} ds + \int_x^l M_1(x,s)\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} ds; \quad (3)$$

$$-\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} = r_{02}i_2(x,t) + L_{02}\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} + M_0\frac{\partial i_1(x,t)}{\partial t} + \int_0^x M_2(x,s)\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} ds + \int_x^l M_2(x,s)\frac{\partial i_2(x,t)}{\partial t} ds. \quad (4)$$

де  $L_{01} = L_{\mu 0} + L_{\sigma 01}$ ;  $M_0 = \frac{L_{\mu 0}}{k} + M_{\sigma 0}$ ;  $L_{02} = \frac{L_{\mu 0}}{k^2} + L_{\sigma 02}$ ;  $L_{\sigma 10}$ ,  $L_{\sigma 20}$ ,  $M_{\sigma 0}$  — власні та взаємна індуктивності розсіювання, первинної і вторинної обмоток та між ними, відповідно,  $L_{\mu 0}$  — індуктивність магнітної системи трансформатора,  $M_1(x, s)$ ,  $M_2(x, s)$  — власні та взаємні міжвиткові індуктивності розсіювання, відповідно, первинної та вторинної обмоток,  $k$  — коефіцієнт трансформації трансформатора,  $l$  — довжина обмотки,  $x$  — поточна довжина координата,  $s$  — поточна координата, за якою визначається відстань від місця  $x$  до координати будь-якого іншого місця осі обмотки [6], [7].

Нехай на трансформатор діє прямокутна хвиля напруги з амплітудою  $U_0$ . В перший момент часу ( $t = 0$ ) струм через індуктивності обмотки не протікає, тому наявність індуктивностей та взаємних індуктивностей не відіграє ніякої ролі. Тоді заступна схема трансформатора (рис. 1) для

цього моменту часу складається тільки з ємностей  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{M01}$ ,  $C_{M02}$  і  $C_{012}$ . Для суто ємнісної схеми можна записати такі рівняння [10]

$$\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} = \frac{C_{01} - C_{012}}{C_{M01}} u_1(x) - \frac{C_{012}}{C_{M01}} u_2(x); \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x^2} = \frac{C_{02} - C_{012}}{C_{M02}} u_2(x) + \frac{C_{012}}{C_{M02}} u_1(x).$$

Увівши позначення рівняння (5) запишемо у такому вигляді

$$\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} - \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x^2} - \gamma_3 u_2(x) - \gamma_4 u_1(x) = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } \gamma_1 = \frac{C_{01} - C_{012}}{C_{M01}}; \quad \gamma_2 = \frac{C_{012}}{C_{M01}}; \quad \gamma_3 = \frac{C_{02} - C_{012}}{C_{M02}}; \quad \gamma_4 = \frac{C_{012}}{C_{M02}}.$$

Зводимо рівняння (6) до одної змінної, і з першого рівняння знаходимо

$$u_2(x) = \frac{1}{\gamma_2} \left( \gamma_1 u_1(x) - \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} \right). \quad (7)$$

Підставляємо (7) в друге рівняння (6), отримуємо:

$$\frac{\partial^4 u_1(x)}{\partial x^4} - (\gamma_1 + \gamma_3) \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} + (\gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_4) u_1(x) = 0. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння (8) запишемо так:

$$\lambda^4 - d_1 \lambda^2 + d_2 = 0, \quad (9)$$

$$\text{де } d_1 = (\gamma_1 + \gamma_3); \quad d_2 = (\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4).$$

Корені бікватратного рівняння (9)

$$\lambda_1 = \sqrt{a_1}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{a_1}; \quad \lambda_3 = \sqrt{a_2}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{a_2}. \quad (10)$$

Звідси розв'язок рівняння (8)

$$u_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}. \quad (11)$$

Підставляємо рівняння (11) в (7), отримуємо:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \frac{C_1}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_1^2) e^{\lambda_1 x} + \frac{C_2}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_2^2) e^{\lambda_2 x} + \frac{C_3}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_3^2) e^{\lambda_3 x} + \frac{C_4}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_4^2) e^{\lambda_4 x} = \\ &= C_1 A_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 A_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 A_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 A_4 e^{\lambda_4 x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{де } A_1 = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_1^2); \quad A_2 = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_2^2); \quad A_3 = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_3^2); \quad A_4 = \frac{1}{\gamma_2} (\gamma_1 - \lambda_4^2).$$

Граничні умови

$$u_1(0) = U_0; \quad u_1(l) = 0; \quad u_2(0) = 0; \quad u_2(l) = 0. \quad (13)$$

Підставляємо граничні умови (13) в рівняння (11) і (12), отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= U_0; \\ C_1 e^{\lambda_1 l} + C_2 e^{\lambda_2 l} + C_3 e^{\lambda_3 l} + C_4 e^{\lambda_4 l} &= 0; \\ C_1 A_1 + C_2 A_2 + C_3 A_3 + C_4 A_4 &= 0; \\ C_1 A_1 e^{\lambda_1 l} + C_2 A_2 e^{\lambda_2 l} + C_3 A_3 e^{\lambda_3 l} + C_4 A_4 e^{\lambda_4 l} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

З системи (14) знаходимо сталі інтегрування  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  та  $C_4$ .

Знайшовши з (14) сталі інтегрування, з (11) та (12) знаходимо розподіл напруги вздовж обмоток для  $t = 0$ , які показано на рис. 2 для первинної обмотки та на рис. 3 для вторинної обмотки, відповідно.

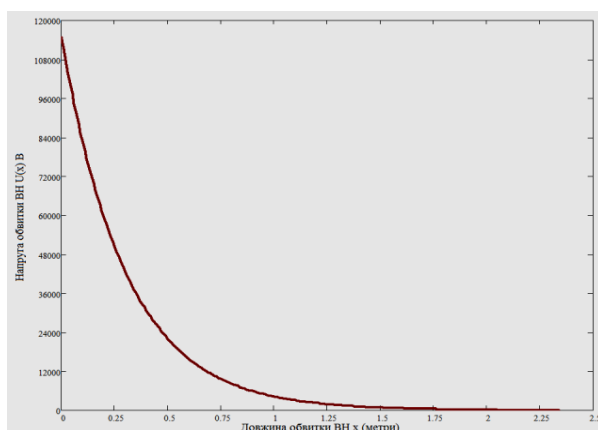


Рис. 2. Початковий розподіл напруги вздовж первинної обмотки

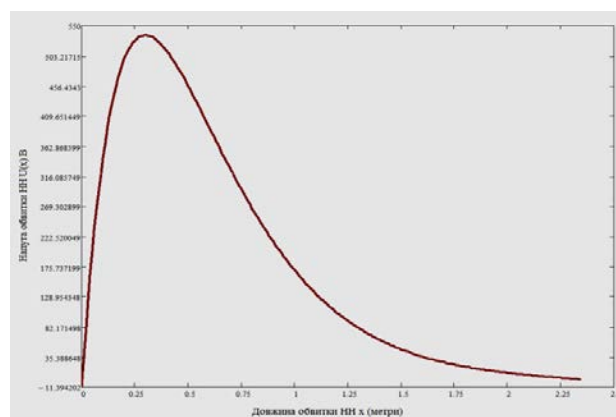


Рис. 3. Початковий розподіл напруги вздовж вторинної обмотки

### Висновки

На підставі запропонованої заступної схеми двообмоткового трансформатора сформовано математичну модель для дослідження початкового розподілу напруги вздовж обмоток під час дії на них імпульсу перенапруги прямокутної форми. Запропоновано новий підхід для розв'язання системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують початковий розподіл напруги вздовж обмоток трансформатора. Отримані результати можна використати для визначення початкових умов під час розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують хвильові процеси в двообмоткових трансформаторах.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Л. В. Бьюлей, *Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах*. М.- Л.: ОНТИ, 1938, 288 с.
- [2] Б. Геллер, А. Веверка, *Волновые процессы в электрических машинах*. М.- Л.: ГЭИ, 1960, 631 с.
- [3] В. В. Базуткин, и Л. Ф. Дмоховская, *Расчеты переходных процессов и перенапряжений*. М.: Энергоатомиздат, 1983, 328 с.
- [4] J. Č. Mikulović, and T. B. Šekara, "The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results," *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 11, no. 2, pp. 243-256, June 2014.
- [5] S. G. Bontidean, M. Badic, M. Iordache, and N. Galan, "Simulations and experimental tests on the distribution of over-voltage within transformer windings," *U.P.B. Sci. Bull. Series C*, vol. 77, issue. 3, 2015.
- [6] M. S. Seheda, Y. V. Cheremnykh, P. F. Gogolyuk, and Y. V. Blyznak, "Mathematical modeling of wave processes in two-winding transformers taking into account the main magnetic flux," *Scientific Bulletin of National Mining University*, no. 5 (185), pp. 80-86, 2021. <https://doi.org/10.33271/nvngu2021-5/080>.
- [7] Mykhailo Seheda, and Petro Gogolyuk, "Mathematical Model of High-Frequency Wave Electromagnetic Processes in Power Transformers," in *20 International Conference "Computational Problems of Electrical Engineering"*, Sept. 15-18, 2019, Slavske-Lviv, Ukraine. <https://doi.org/10.1109/cpee47179.2019.8949151>.
- [8] M. Seheda, O. Hoholyuk, P. Gogolyuk, and Y. Blyznak, "Mathematical model of periodic wave processes of the windings of high-frequency power sources". in *15 International Conference "Advanced trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering"*, Slavske-Lviv, Ukraine, Febr. 25-29, 2020. <https://doi.org/10.1109/TCSET49122.2020.235575>.
- [9] М. С. Сегеда, С. В. Черемних, П. Ф. Гоголюк, і Ю. В. Близнак, «Математична модель хвильових процесів у двообмоткових трансформаторах,» *Технічна електродинаміка*, № 6, с. 63-67, 2020. <https://doi.org/10.15407/techned2020.06.005>.
- [10] М. С. Сегеда, С. В. Черемних, Т. А. Мазур, і О. М. Курилишин, *Математичне моделювання електромагнітних процесів у трансформаторах з урахуванням розподіленості параметрів*, моногр. Львів: вид-во Львівської політехніки, 2016, 148 с.

Рекомендована кафедрою електричних станцій та систем ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 17.03.2022

**Сегеда Михайло Станкович** — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри електроенергетики та систем управління, e-mail: mykhailo.s.seheda@lpnu.ua ;

**Гоголюк Петро Федорович** — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електроенергетики та систем управління;

**Близнак Юрій Васильович** — аспірант кафедри електроенергетики та систем управління.

Національний університет «Львівська політехніка», Львів

M. S. Sehed<sup>1</sup>  
 P. F. Gogolyuk<sup>1</sup>  
 Yu. V. Blyznak<sup>1</sup>

## Mathematical Model of the Initial Overvoltage Pulse Distribution in Two-Winding Transformers

<sup>1</sup>Lviv Polytechnic National University

*A mathematical model for the research of the initial voltage distribution along the windings of a two-winding transformer during the action of a rectangular pulsed overvoltage, is developed. The mathematical model for the research of pulse processes in the windings of two-winding transformers based on a substitution scheme of infinitesimal length element of the two-winding transformer, taking into account electromagnetic connections between windings, longitudinal and transverse mutual inductive connection between windings, the main magnetic flux in the form of differential equations with partial derivatives, is formed. When solving such equations must be found initial and boundary conditions. There is a need to determine the initial voltage distribution along the windings of the transformer during the action of impulse overvoltage. A system of partial differential equations, according to the principles of current continuity for the substitution circuit of an infinitesimal transformer element, taking into account only capacitive elements, and the current in the inductors does not change by a leap, are obtained. The mathematical model for research the initial voltage distribution along windings by solving the system of partial differential equations describing the initial voltage distribution along the windings of a two-winding transformer, based on a modified substitution scheme of an infinitesimal element of a two-winding transformer, is developed. For the first time, the initial voltage distribution along the turns of a two-winding transformer during the action of a rectangular overvoltage pulse, which solves the problem of determining the initial conditions for the boundary value problem of transient wave processes, is obtained. Solving the boundary value problem by the methods of classical mathematical physics allows giving clear mathematical meaning to formal calculations. An approach to the definition of stable integrations of a system of differential equations, with partial derivatives of the second order, is presented.*

**Keywords:** wave process, mathematical model, transformer, differential equations in partial derivatives, initial conditions, boundary value problem, initial voltage distribution.

*Seheda Mykhailo S.* — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Electric Power Engineering and Control Systems, e-mail: mykhailo.s.seheda@lpnu.ua ;

*Gogolyuk Petro F.* — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Electric Power Engineering and Control Systems;

*Blyznak Yurii V.* — Post-Graduate Student of the Chair of Electric Power Engineering and Control Systems