

## АПРОКСИМАЦІЯ РОЗШИРЕНОГО ФІЛЬТРА КАЛМАНА ПАРАЛЕЛЬНОЮ ДВОКАСКАДНОЮ СТРУКТУРОЮ

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

Розглянуто задачу оцінювання вектора стану лінійної динамічної системи за наявності можливих збурень, математична модель яких передбачається відомою. У такому випадку збурення можна вважати складовою частиною вектора стану динамічної системи і оцінювати їх у такий же спосіб, як і вектор стану. Результатом синтезу пристрою обробки результатів спостережень є фільтр Калмана, розмірність якого значно більша розмірності досліджуваної динамічної системи. З практичної точки зору реалізація розширеного фільтра Калмана супроводжується значними труднощами обчислювального характеру, оскільки обсяг необхідних базових математичних операцій — додавання та множення оцінюється пропорційно кубу від розмірності розширеного вектора стану. Для подолання цих труднощів Фрідланд запропонував використовувати замість розширеного фільтра Калмана структуру, що складається з двох, автономно працюючих паралельних фільтрів меншої розмірності, лінійна комбінація виходів яких апроксимує вихід розширеного фільтра Калмана. Відомо, що декомпозиція Фрідланда є адекватною лише для збурень детермінованого типу. Як показали результати подальших досліджень, для збурень загального типу, що містять як детерміновану так і випадкову складову, запропонована структура лише апроксимує вихід розширеного фільтра Калмана, тобто є квазіоптимальною. Подальші спроби зробити її оптимальною, як правило, супроводжувались введенням занадто жорстких обмежень алгебраїчного характеру, щоб їх можна було задовольнити на практиці. Запропоновано один з можливих варіантів модифікації структури Фрідланда з метою зведення її до розширеного фільтра Калмана за умови введення менш обтяжливих обмежень математичного характеру. В основу запропонованої модифікації покладено використання унітарних матриць спеціального типу, що дозволило звести коваріаційні матриці похибок фільтрації до діагонального виду, і таким чином отримати розділені стандартні фільтри Калмана меншої розмірності. Виходи отриманих фільтрів, взяті з певними ваговими множниками, також апроксимують вихід розширеного фільтра Калмана, проте наявність додаткових коригувальних входів значно послаблює обмеження, введені в інших роботах. Розглянутий варіант апроксимації структури Фрідланда може знайти практичне використання у задачах супроводу швидкоманеврених динамічних об'єктів або у задачах нелінійного оцінювання стану динамічних систем за появи нештатного режиму функціонування. Саме у цих напрямках обчислювальна ефективність паралельної двокаскадної структури може бути найкориснішою. У заключній частині статті методом математичного моделювання доведена працездатність запропонованої структури та виконаний порівняльний аналіз з результатами, отриманими у відомих роботах.

**Ключові слова:** розширений фільтр Калмана, фільтр, що вільний від збурень, двокаскадний фільтр Калмана паралельного типу, метод роздільного оцінювання.

### Вступ

Розглянемо задачу оцінювання вектора стану лінійної динамічної системи в присутності можливих збурень, математична модель яких передбачається апріорі відомою. У загальному випадку, їх прийнято вважати складовою частиною вектора стану [1] і рекомендується оцінювати у такий же спосіб, як і вектор стану. За такої інтерпретації природи збурень приходимо до фільтра Калмана з розширеним вектором стану, практична реалізація якого пов'язана зі значними труднощами обчислювального характеру. Для подолання цих перешкод Фрідланд [2] запропонував використовувати замість розширеного фільтра Калмана структуру, що складається з двох паралельно працюючих автономних фільтрів, але меншої розмірності. Обчислювальна ефективність такої двокаскадної структури уже досить тривалий час перебуває в центрі уваги багатьох дослідників, зокрема, що займаються проблемами спостереження за швидкоманевреними об'єктами [3] або розв'язком задач нелінійного оцінювання вектора стану динамічних систем за наявності непередбачуваних несправностей [4]. Відомо, що декомпозиція розширеного фільтра Калмана, яка рекомендована Фрідландом, є оптимальною лише для збурень детермінованого типу [5]. У випадку непередбачу-

ваних випадкових збурень ця структура є квазіоптимальною через труднощі, що пов'язані з виконанням на практиці вельми жорстких алгебраїчних обмежень [5], [6], які на практиці виконати майже не вдається. Так, що у цілому, двокаскадний фільтр Калмана паралельного типу не є еквівалентним розширеному фільтру Калмана. Якщо дотримуватись хронологічного порядку, то дослідницькі роботи з цього напрямку розвивались у такій послідовності. Після публікації роботи [1] деякі автори розглядали збурення у вигляді процесу, який скеровувався білим шумом, але не був корельованим з системним шумом [7], [9], [10]. Однак отримані структури виявлялися лише квазіоптимальними. У роботі [9] розглянутий випадок, коли випадкові збурювання породжувалися білим шумом, корельованим з системним шумом. Показано, що у цьому випадку можливо отримати локально оптимальну структуру двокаскадного фільтра Калмана паралельного типу, однак обмеження, що накладалися на взаємну кореляційну матрицю між шумом збурення та системним шумом, були настільки обтяжливими, що для більшості практичних систем вони залишалися неприйнятними.

### Постановка задачі та мета досліджень

Передбачається, що об'єкт дослідження описується системою різницевих рівнянь

$$\mathbf{y}(k) = \Delta(k)\mathbf{x}(k) + \Sigma(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \mathbf{v}(k); \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \mathbf{w}_x(k); \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k+1) = \Gamma(k+1, k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \mathbf{w}_\varphi(k), \quad (3)$$

де  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^m$  — вектор спостережень;  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^m$  — вектор стану системи;  $\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbf{R}^m$  — вектор стану супутніх збурень. Також передбачається, що системні матриці  $\Delta, \Sigma, \Phi, \mathbf{G}, \Gamma$  мають відповідні розмірності, а матриця  $\Gamma$ , окрім того, є не виродженою. Шумові процеси  $\mathbf{w}_\varphi(k)$ ,  $\mathbf{w}_x(k)$  та шум спостережень  $\mathbf{v}(k)$  є білими гаусовими послідовностями, що мають нульові середні значення та задані коваріаційні матриці:  $\mathbf{M}[\mathbf{w}_x(k)\mathbf{w}_x^T(j)] = \mathbf{Q}_x(k)\delta(k, j)$ ;  $\mathbf{M}[\mathbf{w}_\varphi(k)\mathbf{w}_\varphi^T(j)] = \mathbf{Q}_\varphi(k)\delta(k, j)$ ;

$$\mathbf{M}[\mathbf{w}_x(k)\mathbf{w}_\varphi^T(j)] = \mathbf{Q}_{x\varphi}(k)\delta(k, j); \quad \mathbf{M}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{R}(k)\delta(k, j); \quad \mathbf{M}[\mathbf{w}_x(k)\mathbf{v}^T(j)] = 0;$$

$\mathbf{M}[\mathbf{w}_\varphi(k)\mathbf{v}^T(j)] = 0$ . Початкові стани  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(0)$  вважаються такими, що некорельовані з послідовностями  $\mathbf{w}_\varphi(k)$ ,  $\mathbf{w}_x(k)$ ,  $\mathbf{v}(k)$  і є гаусовими випадковими величинами з параметрами:  $\mathbf{M}[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}_0$ ;  $Cov[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{P}_x(0)$ ;  $\mathbf{M}[\boldsymbol{\varphi}(0)] = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_0$ ;  $Cov[\boldsymbol{\varphi}(0)] = \mathbf{P}_\varphi(0)$ ;  $Cov[\mathbf{x}(0)\boldsymbol{\varphi}^T(0)] = \mathbf{P}_{x\varphi}(0)$ .

Якщо розглядати  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(k)$  як змінні стану  $\mathbf{z}(k)$  збільшеної  $(n+p)$ -розмірності, то неважко записати стандартну форму рівнянь розширеного фільтра Калмана [1] у вигляді

$$\mathbf{z}^*(k|k-1) = \mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{z}^*(k-1|k-1); \quad (4)$$

$$\mathbf{z}^*(k|k-1) = \mathbf{z}^*(k|k-1) + \mathbf{K}_z(k)[\mathbf{y}(k) - \Pi(k)\mathbf{z}^*(k|k-1)]; \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_z(k|k-1) = \mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{P}_z(k-1|k-1)\mathbf{F}_z^T(k, k-1) + \mathbf{Q}_z(k-1); \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_z(k) = \mathbf{P}_z(k|k-1)\Pi^T(k)[\Pi(k)\mathbf{P}_z(k|k-1)\Pi^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}; \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_z(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_z(k)\Pi(k)]\mathbf{P}_z(k|k-1), \quad (8)$$

де  $\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \boldsymbol{\varphi}(k) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{F}_z(k, k-1) = \begin{bmatrix} \Phi(k, k-1) & \mathbf{G}(k) \\ 0 & \Gamma(k, k-1) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{K}_z(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x(k) \\ \mathbf{K}_\varphi(k) \end{bmatrix}$ ;  $\Pi(k) = [\Delta(k) \quad \Sigma(k)]$ ;

$$\mathbf{Q}_z(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x(k) & \mathbf{Q}_{x\varphi}(k) \\ \mathbf{Q}_{x\varphi}^T(k) & \mathbf{Q}_\varphi(k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_z(k|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x(k|k) & \mathbf{P}_{x\varphi}(k|k) \\ \mathbf{P}_{x\varphi}^T(k|k) & \mathbf{P}_\varphi(k|k) \end{bmatrix}.$$

Загально відомо, що складність обчислень нелінійно зростає з ростом розмірності фільтра [8], і у наближенні першого порядку обсяг обчислювальних витрат оцінюється виразом  $(n+p)^3$ , де  $(n+p)$  —

розмірність розширеного вектора стану. У багатьох випадках алгоритм фільтрації (4)—(8) не може бути реалізованим з практичної точки зору. При цьому основною причиною труднощів є значна складність обчислення взаємної коваріаційної матриці  $\mathbf{P}_{x\phi}(k/k)$ . Тому що складову бажано усунути з явних обчислень, що безумовно сприятиме спрощенню практичної реалізації алгоритму фільтрації у вигляді цифрового спеціалізованого обчислювального пристрою. У зв'язку з цим *мета роботи* полягає у такій модернізації двокаскадної структури розділеного фільтра Фрідланда, яка за наявності збурень модельованих випадковим процесом загального типу, здатна забезпечити характеристики близькі до оптимальних за прийнятних обчислювальних витрат. В основу методу модернізації покладено використання унітарного матричного перетворення з метою отримання двох стандартних фільтрів Калмана спеціального типу. При цьому, лінійна комбінація зважених виходів цих спеціальних фільтрів апроксимує вихід розширеного фільтра Калмана, а введення додаткових коригувальних виходів суттєво послабляє обмеження, що вводились у роботах [5], [6], [12], [13].

### Вивід рівнянь модернізованого двокаскадного фільтра Фрідланда

Процес синтезу квазіоптимального двокаскадного фільтра складається з двох етапів. На першому з них проектується фільтр, у якому збурення ігноруються, а для подальшого їх урахування вводиться додатковий зовнішній корегувальний вхід  $\mathbf{u}_{kor}$ . Протягом другого етапу проектується окремий спеціальний фільтр, який оцінює змінні стану можливих збурень з метою вироблення корегувальної дії  $\mathbf{u}_{kor}$ , що буде вводиться у фільтр вільний від збурень. Ці два фільтри утворюють базис, на основі якого будується новий фільтр, у певному сенсі, еквівалентний початковому розширеному фільтрові Калмана.

У тому випадку, коли збурення ігноруються, слід вважати, що  $\boldsymbol{\phi}(k) = 0$ , тоді отримуємо фільтр Калмана, побудований з використанням укорочених моделей (1)—(2):

$$\mathbf{x}_0^*(k|k-1) = \boldsymbol{\Phi}(k, k-1) \mathbf{x}_0^*(k-1|k-1); \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_0^*(k|k) = \mathbf{x}_0^*(k|k-1) + \mathbf{K}_{x_0}(k) [\mathbf{y}(k) - \Delta(k) \mathbf{x}_0^*(k|k-1)]; \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{x_0}(k|k-1) = \boldsymbol{\Phi}(k, k-1) \mathbf{P}_{x_0}(k-1|k-1) \boldsymbol{\Phi}^T(k, k-1) + \mathbf{Q}_{x_0}(k); \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{x_0}(k) = \mathbf{P}_{x_0}(k|k-1) \Delta^T(k) [\Delta(k) \mathbf{P}_{x_0}(k|k-1) \Delta^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}; \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{x_0}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x_0}(k) \Delta(k)] \mathbf{P}_{x_0}(k|k-1), \quad (13)$$

де через  $\mathbf{x}_{x\phi}^*(k/k)$  позначена оцінка стану системи, отримана за умови, що збурення не враховуються;  $\mathbf{P}_{x_0}(k/k)$  — коваріаційна матриця похибок фільтрації за тих же умов, а  $\mathbf{Q}_{x_0}(k/k) = \mathbf{Q}_x(k/k)$ . Для того, щоб урахувати вплив збурень на фільтр (9)—(13), представимо їх у вигляді нового шумового збурення, що діятиме на додатково уведеному зовнішньому вході  $\mathbf{u}_{kor}(k-1)$ . Для цього виконаємо модернізацію рівняння екстрапольованої оцінки  $\mathbf{x}_0^*(k|k-1)$  на один крок вперед та відповідної коваріаційної матриці  $\mathbf{P}_{x_0}(k|k-1)$

$$\mathbf{x}_1^*(k|k-1) = \boldsymbol{\Phi}(k, k-1) \mathbf{x}_0^*(k-1|k-1) + \mathbf{u}_{kor}(k-1); \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{x_1}(k|k-1) = \boldsymbol{\Phi}(k, k-1) \mathbf{P}_{x_0}(k-1|k-1) \boldsymbol{\Phi}^T(k-1) + \mathbf{Q}_{kor}(k), \quad (15)$$

де  $\mathbf{u}_{kor}(k-1)$  — новий зовнішній вхід, а  $\mathbf{Q}_{kor}(k)$  — нова статистика для нового шуму збурення  $\mathbf{w}_x(k)$ . Ці, заново введені параметри, будуть визначатися дещо пізніше. На відміну від фільтра, вільного від збурень, новий фільтр буде називатись модифікованим вільним фільтром. Слід зауважити, що модифікований фільтр у цілому не є оптимальним, оскільки його матриця передачі  $\mathbf{K}_{x_1}(k)$ , обчислена з урахуванням поправки (15), відрізняється від оптимального значення  $\mathbf{K}_{x_0}(k)$ . У зв'язку з цим, коваріаційна матриця похибок фільтрації повинна обчислюватись за загальною формулою, справедливою для будь-якої матриці передачі [1].

$$\mathbf{P}_{x_1}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x_1}(k) \Delta(k)] \mathbf{P}_{x_1}(k|k-1) [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{x_1}(k) \Delta(k)]^T + \mathbf{K}_{x_1}(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{K}_{x_1}^T(k).$$

Надалі передбачається можливість корекції оцінок модифікованого фільтра шляхом уведення оцінок можливих збурень, отриманих за допомогою окремого спеціального фільтра. Це створює передумови для побудови модифікованого двокаскадного фільтра паралельно типу, який апроксимує вихід розширеного фільтра Калмана. Як буде показано далі, вихід апроксимуючого фільтра являє собою лінійну комбінацію модифікованого вільного фільтра і фільтра, пристосованого для оцінювання вектора стану можливих збурень, що описується співвідношеннями

$$\boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1) = \boldsymbol{\Gamma}(k, k-1)\boldsymbol{\varphi}^*(k-1|k-1); \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^*(k|k) = \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1) + \mathbf{K}_\varphi(k) \left[ \mathbf{y}(k) - \Delta(k)\mathbf{x}_1^*(k|k-1) - \mathbf{S}(k)\boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1) \right]; \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_\varphi(k|k-1) = \boldsymbol{\Gamma}(k, k-1)\mathbf{P}_\varphi(k-1|k-1)\boldsymbol{\Gamma}^T(k, k-1) + \mathbf{Q}_\varphi(k-1); \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_\varphi(k) = \mathbf{P}_\varphi(k|k-1)\mathbf{S}^T(k) \left[ \Delta(k)\mathbf{P}_{x_1}(k|k-1)\Delta^T(k) + \mathbf{S}(k)\mathbf{P}_\varphi(k|k-1)\mathbf{S}^T(k) + \mathbf{R}(k) \right]^{-1}; \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_\varphi(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_\varphi(k)\mathbf{S}(k)]\mathbf{P}_\varphi(k|k-1)[\mathbf{I} - \mathbf{K}_\varphi(k)\mathbf{S}(k)]^T + \mathbf{K}_\varphi(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}_\varphi^T(k), \quad (20)$$

де  $\mathbf{x}_1^*(k|k-1)$  та  $\mathbf{P}_{x_1}(k|k-1)$  визначаються рівняннями (14)—(15). З формально-математичної точки зору структури розділених фільтрів (9)—(13) та (16)—(20) можна отримати шляхом застосування двокрокового матричного ортогонального перетворення до розширеного фільтра Калмана, яке приводить коваріаційні матриці  $\mathbf{P}_z(k|k-1)$  та  $\mathbf{P}_z(k|k)$  до діагонального виду. Ці перетворення мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\mathbf{U}(k)] &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{U}(k) \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}(k) \triangleq \mathbf{P}_{x\varphi}(k|k-1) [\mathbf{P}_\varphi(k|k-1)]^{-1}; \\ \mathbf{T}[\mathbf{V}(k)] &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{V}(k) \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}(k) \triangleq \mathbf{P}_{x\varphi}(k|k) [\mathbf{P}_\varphi(k|k)]^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Особливістю уведених перетворень є те, що пряме та обернене перетворення пов'язані простим співвідношеннями, а саме  $\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{U}(k)] = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]$ , тобто різниця лише у зміні знаку. У зв'язку з цим правомірні вирази, що описують взаємозв'язок між змінними (4)—(8) у старій та новій координатних системах

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^*(k|k-1) &= \mathbf{T}[\mathbf{U}(k)]\hat{\mathbf{z}}(k|k-1); \quad \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\mathbf{z}^*(k|k-1); \\ \mathbf{z}^*(k|k) &= \mathbf{T}[\mathbf{V}(k)]\hat{\mathbf{z}}(k|k); \quad \hat{\mathbf{z}}(k|k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\mathbf{z}^*(k|k); \\ \mathbf{P}_z(k|k-1) &= \mathbf{T}[\mathbf{U}(k)]\hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[\mathbf{U}(k)]; \quad \hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1) = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\mathbf{P}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[-\mathbf{U}(k)]; \\ \mathbf{K}_z(k) &= \mathbf{T}[\mathbf{V}(k)]\hat{\mathbf{K}}_z(k); \quad \hat{\mathbf{K}}_z(k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\mathbf{K}_z(k); \\ \mathbf{P}_z(k|k) &= \mathbf{T}[\mathbf{V}(k)]\hat{\mathbf{P}}_z(k|k)\mathbf{T}^T[\mathbf{V}(k)]; \quad \hat{\mathbf{P}}_z(k|k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\mathbf{P}_z(k|k)\mathbf{T}^T[-\mathbf{V}(k)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Позначення для змінних у новій координатній системі (див. (22) справа) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(k|k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^*(k|k) \\ \boldsymbol{\varphi}^*(k|k) \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^*(k|k-1) \\ \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1) \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{K}}_z(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x_1}(k) \\ \mathbf{K}_\varphi(k) \end{bmatrix}; \\ \hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_1}(k|k-1) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_\varphi(k|k-1) \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{P}}_z(k|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_1}(k|k) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_\varphi(k|k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Базуючись на співвідношеннях (22), отримаємо еквівалент розширеного фільтра Калмана у новій координатній системі. Для цього застосуємо ітераційну процедуру, що складається з двох кроків.

*Крок 1:* Якщо підставити (4)—(8) у праву частину (22), то отримаємо:

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{z}^*(k-1|k-1); \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\left\{\mathbf{z}^*(k|k-1) + \mathbf{K}_z(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{\Pi}(k)\mathbf{z}^*(k|k-1)\right]\right\}; \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1) = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\left[\mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{P}_z(k-1|k-1)\mathbf{F}_z^T(k, k-1) + \mathbf{Q}_z(k-1)\right]\mathbf{T}^T[-\mathbf{U}(k)]; \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_z(k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\mathbf{P}_z(k|k-1)\mathbf{\Pi}^T(k)\left[\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{P}_z(k|k-1)\mathbf{\Pi}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right]^{-1}; \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z(k|k) = \mathbf{T}[-\mathbf{V}(k)]\left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_z(k)\mathbf{\Pi}(k)\right]\mathbf{P}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[-\mathbf{V}(k)]. \quad (27)$$

Крок 2: Підстановка лівої частини (22) у праву частину виразів (23)—(27) дає такий результат:

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{T}[\mathbf{V}(k-1)]\hat{\mathbf{z}}(k-1|k-1); \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k) = \mathbf{T}[\mathbf{U}(k) - \mathbf{V}(k)]\hat{\mathbf{z}}(k|k-1) + \hat{\mathbf{K}}_z(k)\left\{\mathbf{y}(k) - \mathbf{\Pi}(k)\mathbf{T}[\mathbf{U}(k)]\hat{\mathbf{z}}(k|k-1)\right\}; \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_z(k) = \mathbf{T}[\mathbf{U}(k) - \mathbf{V}(k)]\hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[\mathbf{U}(k)]\mathbf{\Pi}^T(k)\left\{\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{T}[\mathbf{U}(k)]\mathbf{P}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[\mathbf{U}(k)]\mathbf{\Pi}^T(k) + \mathbf{R}(k)\right\}^{-1}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1) &= \mathbf{T}[-\mathbf{U}(k)]\mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{T}[\mathbf{V}(k-1)]\mathbf{P}_z(k-1|k-1)\mathbf{T}^T[\mathbf{V}(k-1)]\mathbf{F}_z^T(k, k-1) + \\ &+ \mathbf{Q}_z(k-1)\mathbf{T}^T[-\mathbf{U}(k)]; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_z(k|k) = \left\{\mathbf{T}[\mathbf{U}(k) - \mathbf{V}(k)] - \hat{\mathbf{K}}_z(k)\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{T}[\mathbf{U}(k)]\right\}\hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1)\mathbf{T}^T[\mathbf{U}(k) - \mathbf{V}(k)]. \quad (32)$$

Сукупність виразів (28)—(32) — це не що інше, як опис розширеного фільтра Калмана у новій координатній системі. Враховуючи діагональну структуру перетворених матриць  $\hat{\mathbf{P}}_z(k|k-1)$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_z(k|k)$  разом з виразами (30) та (32), сформуємо обмеження, що накладаються на матриці зв'язку  $\mathbf{U}(k)$ ,  $\mathbf{V}(k)$

$$\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{U}}(k)\mathbf{\Gamma}(k-1)\mathbf{P}_\varphi(k-1|k-1)\mathbf{\Gamma}^T(k-1) + \mathbf{Q}_{x\varphi}(k-1) - \mathbf{U}(k)\left\{\mathbf{\Gamma}(k-1)\mathbf{P}_\varphi(k-1|k-1)\mathbf{\Gamma}^T(k-1) + \mathbf{Q}_\varphi(k-1)\right\}; \quad (33)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{U}(k) - \mathbf{V}(k) - \mathbf{K}_{x_1}(k)\mathbf{S}(k). \quad (34)$$

У підсумку матриці  $\tilde{\mathbf{U}}(k)$  та  $\mathbf{S}(k)$  визначаються за формулами

$$\tilde{\mathbf{U}}(k) = [\mathbf{F}_z(k, k-1)\mathbf{V}(k-1) + \mathbf{G}(k-1)]\mathbf{\Gamma}^{-1}(k, k-1); \quad (35)$$

$$\mathbf{S}(k) = \Delta(k)\mathbf{U}(k) + \mathbf{\Sigma}(k). \quad (36)$$

Розкриття дужок у виразах (28)—(32) з урахуванням формул (33)—(36) дозволяє спроектувати окремий фільтр, здатний оцінювати динамічний процес зміни стану збурень. Структура такого фільтра описується виразами (16)—(20). Сукупний розв'язок рівнянь (18), (33)—(34) дозволяє отримати альтернативні вирази для матриць зв'язку  $\mathbf{U}(k)$ ,  $\mathbf{V}(k)$  у вигляді

$$\mathbf{U}(k) = \tilde{\mathbf{U}}(k) + [\mathbf{Q}_{x\varphi}(k-1) - \tilde{\mathbf{U}}(k)\mathbf{Q}_\varphi(k-1)]\mathbf{P}_\varphi^{-1}(k|k-1); \quad (37)$$

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{U}(k) - \mathbf{K}_x(k)\mathbf{S}(k). \quad (38)$$

Вираз для корегуального зовнішнього входу  $\mathbf{u}_{kor}(k-1)$  та уведеної нової коваріаційної матриці векторного шуму збурень  $\mathbf{Q}_{kor}(k)$ , які входять до складу модифікованого фільтра, вільного від збурень (14)—(15), можна визначити зі співвідношень (28), (30), (33) з урахуванням формули (35):

$$\mathbf{u}_{kor}(k-1) = [\tilde{\mathbf{U}}(k+1) - \mathbf{U}(k+1)]\mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{\Phi}^*(k|k); \quad (39)$$

$$\mathbf{Q}_{kor}(k) = \mathbf{Q}_x(k) - \mathbf{Q}_{x\varphi}(k) \tilde{\mathbf{U}}^T(k+1) - \mathbf{U}(k+1) [\mathbf{Q}_{x\varphi}(k) - \tilde{\mathbf{U}}(k+1) \mathbf{Q}_\varphi(k)]^T. \quad (40)$$

Аналізуючи рівняння (39) і (40), неважко помітити різницю між модифікованим фільтром та фільтром (9)—(13), що повністю відділений від збурень. Вона проявляється у формі зв'язку з другим фільтром, призначеним виключно для оцінювання збурень. Зазначений зв'язок реалізується у процесі обчислень матриці перетворення  $\mathbf{U}(k)$ , корегувального зовнішнього входу  $\mathbf{u}_{kor}(k-1)$  та модернізованої коваріаційної матриці шумів збурень  $\mathbf{Q}_{kor}(k)$  за формулами (37)—(40). Звичайно, наявність корегувальних зв'язків буде супроводжуватись зростанням складності та обсягу обчислень, проте вони будуть незначними порівняно зі структурою, запропонованою Фрідландом. У підсумку, отримані співвідношення дозволяють виконати апроксимацію розширеного фільтра Калмана розміру  $(n+p)$  паралельно діючою структурою, що складається з двох фільтрів меншої розмірності, охоплених спрощеними перехресними зв'язками. При цьому вихід розширеного фільтра Калмана замінюється лінійною комбінацією виходів, що входять до складу модифікованої паралельно діючої структури,

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{x}_1^*(k|k-1) + \mathbf{U}(k) \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1); \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}_1^*(k|k) + \mathbf{V}(k) \boldsymbol{\varphi}^*(k|k); \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_{11}(k|k-1) = \mathbf{P}_{x_1}(k|k-1) + \mathbf{U}(k) \mathbf{P}_\varphi(k|k-1) \mathbf{U}^T(k) = \mathbf{M} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T \right\}; \quad (43)$$

$$\mathbf{P}_{11}(k|k) = \mathbf{P}_{x_1}(k|k) + \mathbf{V}(k) \mathbf{P}_\varphi(k|k) \mathbf{V}^T(k) = \mathbf{M} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)] [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)]^T \right\}; \quad (44)$$

$$\mathbf{P}_{12}(k|k-1) = \mathbf{U}(k) \mathbf{P}_\varphi(k|k-1) = \mathbf{M} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1)]^T \right\}; \quad (45)$$

$$\mathbf{P}_{12}(k|k) = \mathbf{V}(k) \mathbf{P}_\varphi(k|k) = \mathbf{M} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k)] [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k)]^T \right\}; \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_{22}(k|k-1) = \mathbf{P}_\varphi(k|k-1) = \mathbf{M} \left\{ [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1)] [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k-1)]^T \right\}; \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_{22}(k|k) = \mathbf{P}_\varphi(k|k) = \mathbf{M} \left\{ [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k)] [\boldsymbol{\varphi}(k) - \boldsymbol{\varphi}^*(k|k)]^T \right\} \quad (48)$$

за таких початкових умов:  $\mathbf{V}(0) = \mathbf{P}_{x\varphi}(0) \mathbf{P}_\varphi^{-1}(0)$ ;  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{x}_0} + \mathbf{V}(0) \overline{\boldsymbol{\varphi}_0}$ ;  $\boldsymbol{\varphi}^*(0) = \overline{\boldsymbol{\varphi}_0}$ ;  $\hat{\mathbf{P}}_\varphi(0) = \mathbf{P}_\varphi(0)$ ;  $\hat{\mathbf{P}}_x(0) = \mathbf{P}_x(0) - \mathbf{V}(0) \mathbf{P}_\varphi(0) \mathbf{V}^T(0)$ .

### Приклад практичного застосування

У цьому підрозділі наводяться результати моделювання еквіваленту розширеного фільтра Калмана у вигляді паралельної двокаскадної структури стосовно задачі заходу на посадку швидкоманеврового повітряного судна по системі MLS, тактичні можливості якої показані на рис. 1. На відміну від стандартних траєкторій 5—6 траєкторії 1, 9—11 потребують інтенсивного ситуативного маневрування з метою входження у регламентований радіоелектронний «коридор» 13. Така ситуація характерна, наприклад, для повітряних суден з вертикальним зльотом і посадкою, легкомоторних приватних літаків, гелікоптерів, літаків сільськогосподарської авіації або тих, що потрапили у позаштатний режим роботи. У процесі моделювання використовувалась лінеаризована модель траєкторії руху повітряного судна у вертикальній площині, яка була розроблена у роботі [11]. Непередбачуваний маневр імітувався введенням збурення у вигляді функції одиничного стрибка на часовому інтервалі  $[k-300, k-600]$ .

Моделювання виконувалось у системі MATLAB за таких апріорних даних:  $\mathbf{Q}_\varphi = [0,004 \ 0,0; 0,0 \ 0,004]$ ,  $\mathbf{Q}_x = [0,0016 \ 0,0; 0,0 \ 0,0016]$ ,  $\mathbf{x} = [8,0 \ 0/0]$ ,  $\mathbf{x}^*(\%) = [7,0 \ 0,01]$ ,  $\mathbf{P}_x(\%) = [0,625 \ 0,0; 0,0 \ 0,04]$ ,  $\mathbf{R} = 0,25$ ;  $\mathbf{x}^*(\%) = [7,0 \ 0,01]$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^*(\%) = [0,0; 0,0]$ ,  $\mathbf{P}_\varphi(\%) = [0,1 \ 0,0; 0,0 \ 0,01]$ . Частота поновлення поса-

дкових даних становила — 40,5 Гц; коефіцієнт кореляції — 0,2.

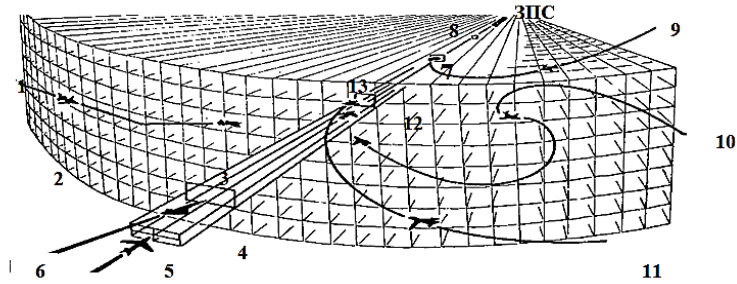


Рис. 1. Тактичні можливості системи MLS: 1 — захід на посадку по «ламаний» траєкторії; 2 — зона дії системи; 3 — «вікно» для швидкісних повітряних суден; 4 — система посадки СП-70; 5 — захід на посадку у системі СП-70; 6 — захід на посадку високошвидкісного повітряного судна; 7 — «вікно» для низько-швидкісних повітряних суден; 8 — маркерний радіомаяк; 9 — у зоні дії система MLS дозволяє визначити віддаль до початку ЗПС; 10 — захід на посадку по подовженій криволінійній траєкторії; 11 — захід на посадку по криволінійній траєкторії; 12 — маркерний радіомаяк; 13 — «вікно» для середньо-швидкісних повітряних суден

Основний результат моделювання показано на рис. 2.

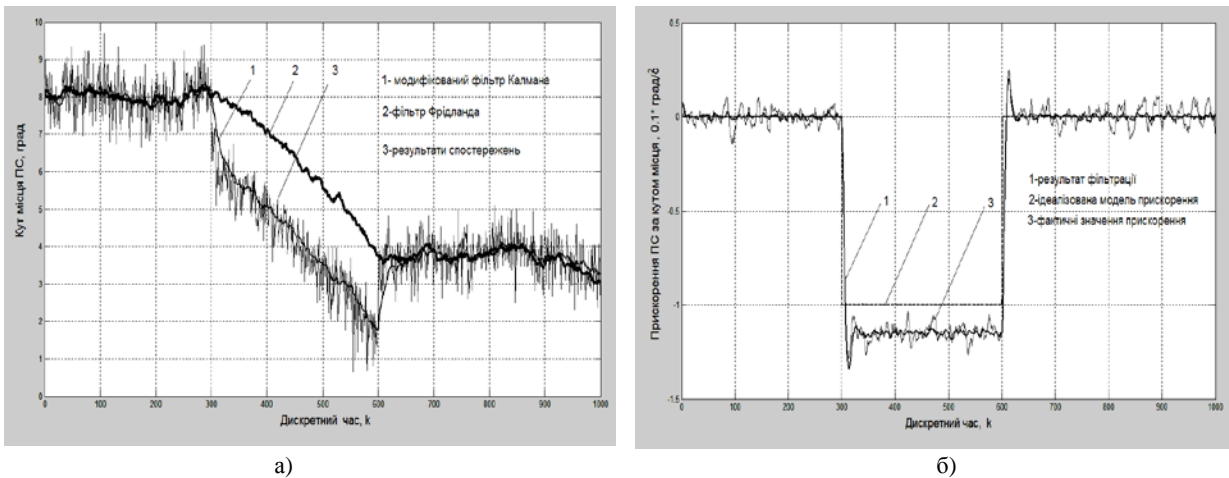


Рис. 2. Результати роздільного оцінювання: а — кута місця ПС; б — прискорення ПС

Аналізуючи отримані залежності, можна помітити, що на відміну від модифікованих оцінок (41)—(48) оцінки, отримані за допомогою фільтра Фрідланда є зміщеними, оскільки фільтр Фрідланда не розрахований на роботу за умови корельованості шумів збурення  $w_{\varphi}(k)$  і  $w_x(k)$ . Стосовно оптимальності розглянутої структури у сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки оцінювання, то вона знайшла обґрунтування зовсім недавно у теоремі [4], де стверджується її еквівалентність розширеному фільтру Калмана, але за умови, що коваріаційна матриця корегуального шуму  $Q_{kor}(k)$  (40) повинна контролюватися під час роботи фільтра і залишатися невід'ємно означеною. У в іншому випадку збіжність оцінок не гарантується. Тоді, коли виконується умова  $Q_{kor}(k) - U(k+1)$ ,  $Q_{\varphi}(k) = 0$ , корегувальний вхід  $u_{kor}(k-1)$  зникає і модифікований фільтр та фільтр вільний від збурень, уведений у роботу [6], [13], стають еквівалентними. Більше того, якщо збурення є просто систематичною похибкою, то корегувальна матриця  $Q_{kor}(k)$  буде збігатися з  $Q_s(k)$ , а модифікований фільтр вироджується у фільтр Фрідланда. У цілому всі розглянуті структури не є еквівалентними розширеному фільтру Калмана, а залишаються лише квазіоптимальними, оскільки у основу синтезу цих структур покладено принцип обміну точності оцінювання на скорочення обсягу обчислювальних витрат.

## Висновки

1. Розглянуто один з можливих варіантів модернізації двокаскадної паралельної схеми фільтрації, запропонованій Фрідландом, який за наявності збурень, модельованих випадковим процесом загального типу, здатен забезпечити характеристики близькі до оптимальних за прийнятних обчислювальних витрат. При цьому, лінійна комбінація виходів паралельно працюючих спеціальних фільтрів апроксимує вихід розширеного фільтра Калмана, а введення додаткових коригувальних

входів суттєво послабляє обмеження, що уводились раніше у загальновідомих роботах.

2. На конкретному прикладі методом математичного моделювання проілюстрована працездатність розглянутого варіанта апроксимації розширеного фільтра Калмана.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] И. Е. Казаков, и С. В. Мальчиков, *Анализ стохастических систем в пространстве состояний*. М.: Наука, 1983, 416 с.
- [2] B. Friedland, "Treatment of Bias in Recursive Filtering," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-14, pp. 359-367, 1969.
- [3] Salam Ahmed O. Abdul, "Adaptive Tracking of Maneuvering Targets Using Two-Stage Kalman Filter," in *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT)*, 2015, pp. 517-521.
- [4] X. Chen, R. Sun, W. Jiang, Q. Jia and J. Zhang, "A novel two-stage extended Kalman filter algorithm for reaction fly-wheels fault estimation," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 29, issue 2, pp. 462-469, 2016.
- [5] A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice and W. D. Blair, "On the optimality of two-stage state estimation in the presence of random bias," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 38, issue 2, pp. 1279-1282, 1993.
- [6] A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice and W. D. Blair, "A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias," in *Proc. Amer. Control Conf., Chicago, IL*, 1992, pp. 1784-1788.
- [7] E. C. Tacker, and C. C. Lee, "Linear filtering in the presence of time varying bias," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-17, pp. 828-829, 1972.
- [8] A. Tanaka, "Parallel computation in linear discrete filtering," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-20, pp. 573-575, 1975.
- [9] J. M. Mendel, and H. D. Washburn, "Multistage estimation of bias states in linear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 28, no. 4, pp. 511-524, 1978.
- [10] D. H. Zhou, Y. X. Sun, Y. G. Xi, and Z. J. Zhang, "Extension of Friedland's separate-bias estimation to randomly time-varying bias of nonlinear systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 38, no. 4, pp. 1270-1273, 1993.
- [11] А. Ю. Воловик, Д. В. Гаврилов, та В. С. Мозговий, «Розробка моделі траєкторних спостережень для авіаційної посадкової системи.» *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки*, т. 1, № 6 (267), с. 173-182, 2018.
- [12] K. P. Bharani, and C. M. Darouach. *Two-stage information filters for single and multiple sensors, and their square-root versions. Automatica*. Vol. 98, December 2018, pp. 20-27.
- [13] M. Mejari, D. Piga, and A. Bemporad. "A bias-correction method for closed-loop identification of Linear Parameter-Varying systems," *Automatica*, vol. 87, January 2018, pp 128-141.

Рекомендована кафедрою радіотехніки ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 31.05.2019

**Воловик Андрій Юрійович** — канд. техн. наук, доцент кафедри радіотехніки, e-mail: voland@vntu.edu.ua ;  
**Гаврилов Дмитро Володимирович** — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри радіотехніки, e-mail: havrilov@vntu.edu.ua .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

**A. Yu. Volovyk<sup>1</sup>**  
**D. V. Havrilov<sup>1</sup>**

## Approximation of the Expanded Filter of Kalman Parallel Two-cascade Structure

<sup>1</sup>Vinnitsia National Technical University

The given paper considers the problem of linear dynamic system state estimation in the presence of possible perturbations. Generally, perturbation is considered to be a constituent of linear dynamic system state vector. Assessment, in this case, is carried out in the same way. At such interpretation the standard decision is the Kalman filter with expanded state vector. Implementation of such filter is connected with considerable difficulties of computing character. For their overcoming Friedland suggested to use structure which consists of two, independent, smaller dimension parallel filters instead of an expanded Kalman filter. The method of parallel separate estimation is used as an effective remedy of reduction of the computing expenses connected with implementation of an expanded Kalman filter which dimension considerably exceeds dimension of controlled system. In this case linear combination of exits of such structure, approximates an exit of an expanded Kalman filter. The computing efficiency of parallel structure with two cascades, long time, is very popular in such directions as problems of tracking it is high-speed purposes or a perspective of nonlinear assessment in the presence of possible malfunctions. It is known that the decomposition recommended by Friedland is optimum only for perturbations of the determined type. In a situation of completely accidental vector of perturbation this structure is suboptimal. The practical difficulties connected with complexity of calculations of certain algebraic algorithms are



the reason of it. As these restrictions are rigidly imposed, it is possible to overcome them seldom or never. The purpose of this work is researches of one of possible options of modification Friedland structure for the purpose of its reduction to an expanded Kalman filter with less strict restrictions. As the basis, for the considered modernization use of a orthogonal transformation method of matrixes for the purpose of receiving two standard Kallman filters of special type is necessary. Linear combination of these filters exits will also approximate an exit of the expanded Kalman filter, and introduction of the additional adjusting inputs considerably will weaken, considered in other works, restrictions.

In the conclusion, the method of mathematical modeling showed efficiency of the modified structure. Comparative analysis with the results received in other works is carried out.

**Keywords:** expanded filter of Kalman, filter, free from indignations, two-cascade filter of Kalman of parallel type, method of separate estimation.

**Volovyk Andrii Yu.** — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of the Chair of Radio Engineering, e-mail voland@vntu.edu.ua ;

**Havrilov Dmytro V.** — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Radio Engineering, e-mail: havrilov@vntu.edu.ua

**А. Ю. Воловик<sup>1</sup>**  
**Д. В. Гаврилов<sup>1</sup>**

## Аппроксимация расширенного фильтра Калмана параллельной двухкаскадной структурой

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

Рассмотрена задача оценки состояния линейной динамической системы в присутствии возможных возмущений. В общем случае, возмущения принято считать составной частью вектора состояния линейной динамической системы и оценивают их таким же способом как и вектор состояния. При такой интерпретации общепринятым решением является фильтр Калмана с расширенным вектором состояния. Практическая реализация такого фильтра связана со значительными трудностями вычислительного характера. Для их преодоления Фридланд предложил использовать вместо расширенного фильтра Калмана структуру, которая состоит из двух, независимых, параллельных фильтров меньшей размерности. Метод параллельного отдельного оценивания используется в качестве эффективного средства сокращения вычислительных затрат, связанных с практической реализацией расширенного фильтра Калмана, при условии, что его размерность значительно превышает размерность контролируемой системы. При этом, линейная комбинация выходов такой структуры, аппроксимирует выход последнего. Вычислительная эффективность параллельной структуры с двумя каскадами, долгое время является весьма популярной в тех случаях, когда направлениях как задачи от слеживания высоко-маневренных целей или проблематична нелинейной оценки в присутствии некорректного функционирования. Известно, что разложение, рекомендуемое Фридландом, оптимально только для возмущений детерминированного типа. В ситуации случайного вектора возмущения эта структура является квазиоптимальной. Причиной этого являются трудности, связанные с производимостью в практике определенных алгебраических ограничений. Поскольку эти ограничения жестко навязаны, преодолеть их удается только в очень редких случаях. В работе предлагается один из возможных вариантов модификации структуры Фридланда с целью ее приведения к расширенному фильтру Калмана при менее жестких ограничениях. В качестве основания, для рассмотренной модернизации положено использование метода ортогонального преобразования матриц с целью получения двух стандартных фильтров Калмана специального типа. Линейная комбинация выходов этих фильтров будет также аппроксимировать выход расширенного фильтра Калмана, а введение дополнительных корректирующих входов значительно ослабит, рассмотренные в других работах, ограничения. В заключении, методом математического моделирования продемонстрирована эффективность модифицированной структуры. Проведен сравнительный анализ с результатами, полученными в других работах.

**Ключевые слова:** расширенный фильтр Калмана, фильтр, свободный от возмущений, двухкаскадный фильтр Калмана параллельного типа, метод отдельного оценивания.

**Воловик Андрей Юрьевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры радиотехники, e-mail: voland@vntu.edu.ua ;

**Гаврилов Дмитрий Владимирович** — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры радиотехники, e-mail: havrilov@vntu.edu.ua