

А. В. Усов¹
М. В. Куніцин¹

УПРАВЛІННЯ ЛІНІЙНИМИ НЕОДНОРІДНИМИ СИСТЕМАМИ МЕТОДАМИ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

¹Одеський національний політехнічний університет

Розглянуті математичні моделі лінійних неоднорідних систем на базі сингулярних інтегральних рівнянь в залежності від розташування неоднорідностей. Проведена оцінка напружено-деформованого стану біля дефекту типу тріщини або жорсткого включення за допомогою спільного застосування основних положень плоскої задачі теорії пружності, а також теорії функцій комплексного змінного або ж методу сингулярних інтегральних рівнянь. На основі сингулярних інтегральних рівнянь з некарлеманівським зсувом рекомендовані динамічні моделі фізичних явищ, що формуються у неоднорідних середовищах. Розглянуто можливості підвищення надійності і довговічності циліндричної групи технологічними методами, в тому числі використання покриттів зі зносостійких матеріалів на робочі поверхні циліндрів. Фінішні методи обробки виробів зі зносостійкими покриттями призводять до утворення дефектів на оброблюваних поверхнях, що знижують експлуатаційні характеристики цих виробів. Аналіз причин утворення відколів і тріщин на оброблюваних поверхнях зазначених виробів показав, що поява цих дефектів пов'язана з тепловими процесами, які супроводжують механічну обробку. Розроблено аналітичну модель для визначення термомеханічного стану робочої поверхні циліндра зі зносостійким покриттям. Проведено трібокорозійне дослідження композиційних матеріалів на основі Ni/Ni-TiO₂, отриманих методом електрохімічного осадження. Результати моделювання з використанням сингулярних інтегральних рівнянь відкривають можливість ефективної оцінки впливу сторонніх наповнювачів на втрату функціональних властивостей неоднорідними системами. У свою чергу, точне визначення порядку і характеру сингулярності біля вершин гострокутної недосконалої в неоднорідному середовищі, представлено в аналітичному вигляді, необхідне для формулювання і опису відповідних критеріальних співвідношень для визначення функціональних властивостей неоднорідних систем.

Ключові слова: математична модель, лінійні системи, сингулярні інтегральні рівняння, некарлеманівський зсув, імпульсна характеристика, дефекти.

Вступ

Найефективнішими із загального арсеналу методів дослідження фізичних процесів, що відбуваються в середовищах неоднорідної структури і електромагнітних сигналів в середовищах зі змінними характеристиками, а також формування мікротріщин в конструкційних матеріалах, що мають різного роду неоднорідності спадкового походження до теперішнього часу є методи із застосуванням інтегралів Коші, крайових задач теорії аналітичних функцій, а також методу сингулярних інтегральних рівнянь [1]—[3].

Постанова проблеми

Розглянемо деякі положення, необхідні для моделювання систем в неоднорідному просторі. Внутрішню і зовнішню області, розділені системою замкнутих контурів, що входять в контур L , позначимо відповідно S^+ і S^- . При цьому вважаємо, що зовнішня область S^- містить нескінченно віддалену точку комплексної площини C . Нехай функція $f(t) \in H^\mu(L)$, де $H^{(\mu)}(L)$ — безліч неперервних за Гельдером на контурі функцій, тобто таких що відповідають умовам [4], [5]:

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu, \quad A > 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (1)$$

Константа A тут називається постійною Гельдера, а μ — показником Гельдера. При цьому, в точках $z \in L$ комплексної площини C існує в сенсі головного значення інтеграл типу Коші

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \notin L, \quad (2)$$

причому в точках $z \in L$ цей інтеграл існує в звичайному сенсі, а на контурі L справедливе співвідношення [2]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2} f(t), \quad (3)$$

в якому інтеграл правої частини абсолютно збігається. Властивості інтеграла типу Коші використовуються безпосередньо для розв'язання двовимірних задач теорії пружності, а також для його обчислення. Наприклад, граничні значення сингулярного інтеграла представляються у вигляді [2]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) \bar{d}t}{t - z}, \quad (4)$$

де $\varphi(t)$ належить класу функцій Гельдера $H^{(\mu)}$.

Спільне застосування основних положень плоскої задачі теорії пружності, а також теорії функцій комплексного змінного або ж методу сингулярних інтегральних рівнянь дозволяє провести оцінку напружено-деформованого стану біля дефекту типу тріщини або жорсткого включення. Особливе значення при цьому має асимптотика розподілів тензора напружень і вектора переміщень, викликаних внесенням зазначених дефектів в пружне тіло. У асимптотичному наближенні об'єднані тензор напружень і вектор переміщень біля вершин прямолінійного жорсткого включення або тріщини представляються таким чином [6]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = -\frac{K_I^\pm}{4\sqrt{2\pi r^*}} \begin{pmatrix} (3-2p^*) \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{5\beta}{2} \\ (5+2p^*) \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{5\beta}{2} \\ (1+2p^*) \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{5\beta}{2} \end{pmatrix} - \frac{K_{II}^\pm}{4\sqrt{2\pi r^*}} \begin{pmatrix} -(3-2p^*) \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{5\beta}{2} \\ (2p^* - 5) \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{5\beta}{2} \\ (1+2p^*) \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{5\beta}{2} \end{pmatrix} + O(r^0); \quad (5)$$

$$4G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_I^\pm}{\rho^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} [2(x+\rho^*)+1] \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{3\beta}{2} \\ [2(x-\rho^*)-1] \sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{3\beta}{2} \end{pmatrix} - \frac{K_{II}^\pm}{\rho^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} [2(x+\rho^*)+1] \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3\beta}{2} \\ -[2(x-\rho^*)-1] \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{3\beta}{2} \end{pmatrix} + O(r^{3/2}),$$

де $(\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy})$ — компоненти тензора напружень; (u, v) — компоненти вектора пружних переміщень; K_I^\pm, K_{II}^\pm — коефіцієнти інтенсивності напружень (коефіцієнти при сингулярній частині напружень); знаки «+» і «-» відповідають правої і лівої вершинам лінійного тріщиноподібного дефекту. Якщо $\rho^* = -1$, то з наведених формул випливає відоме асимптотичне розподілення біля тріщини, а з $\rho^* = x$, де $x = 3 - 4\mu$ для плоскої деформації та $x = (3 - \mu)/(1 - \mu)$ для плоского напруженого стану, отримуємо відповідну асимптотику в разі жорсткого включення [6].

Напруження поблизу вершин тріщиноподібного дефекту мають кореневу особливість $1/\sqrt{r}$, де r — відстань від кінця тріщини або включення. При цьому коефіцієнти K_I і K_{II} характеризують локальне підвищення рівня напружень у вершині тріщиноподібного дефекту, не будучи при цьому залежними величинами від координат цього дефекту. Хоча розмірність коефіцієнтів інтенсивності напружень, на перший погляд, здається незвичайною $\text{МПа}/\sqrt{m}$, ці величини можна інтерпретувати як деяку напругу, що діє на відстані $\pi/2$ від вершини.

Результати моделювання відкривають можливість ефективної оцінки впливу сторонніх наповнювачів на втрату міцності пружного тіла, що містить відмічені недосконалості. У свою чергу

точне визначення порядку і характеру сингулярності напружень поблизу вершин гострокутної недосконалості в пружному матеріалі, представлено в аналітичному вигляді, необхідно в механіці руйнування для формулювання і запису відповідних критеріальних співвідношень міцності.

Крайова задача Рімана полягає в такому: потрібно знайти кусочно-голоморфну функцію $\Phi(z)$ з лінією стрибків C , що має кінцевий порядок на нескінченності, за граничною умовою

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + q(t), \quad t \in C, \quad (6)$$

де $G(t), q(t)$ — задані на C функції класу H_0 , які називаються коефіцієнтом з вільним членом крайової задачі. Рівність (6) має виконуватися для всіх звичайних точок лінії C .

Розглянемо попередньо відповідну (6) однорідну крайову задачу Рімана з умовою

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in C. \quad (7)$$

Розв'язок $X(Z)$ однорідної задачі (7) називається канонічним розв'язком, якщо не тільки $X(Z)$, але і $1/X(z)$ є кусково-голоморфними функціями.

Передбачається, що коефіцієнт $G(t)$ належить класу H_0 і ніде на C в нуль не згортається. Довимосся розуміти під $\ln G(t)$ цілком певну для кожної дуги $a_k b_k$ гілку логарифмічної функції. Очевидним є, що $\ln G(t)$ також належить до класу H_0 .

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Тоді поведінку функції $\exp \gamma(z)$ поблизу кута c_j описує формула. Будемо шукати канонічний розв'язок задачі (7) у вигляді

$$X(z) = \exp \gamma(z) \prod_{j=1}^n (z - c_j)^{-x_j} = \prod_{j=1}^n (z - c_j)^{\alpha_j - x_j + \beta_j} \exp \gamma_0(z), \quad (8)$$

де x_j — цілі числа, які повинні бути вибрані так, щоби забезпечити потрібну поведінку функції $X(Z)$ в околах вузлів лінії C , а саме $-1 < a_j - b_j < 1$.

Дистанційне зондування є одним з ефективних методів дослідження природних явищ, яке успішно застосовується для вивчення неоднорідних середовищ, дослідженні їх характеристик, а також для визначення особливостей їх еволюції [7].

Відомо, що реакція довільної лінійної системи зі змінними параметрами на вплив деякого вхідного сигналу $S(t)$ може бути описана за допомогою інтегрального рівняння такого вигляду [4]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) s(\tau) d\tau = g(t). \quad (9)$$

Таким чином, поведінка системи повністю визначається видом ядра $h(\tau, t)$, яке називають імпульсною характеристикою системи.

Необхідно зазначити, що розв'язання рівняння (9) щодо невідомої функції $s(t)$ є досить складною задачею, а відновлення імпульсної характеристики $h(\tau, t)$ за відомими значеннями функцій $s(t)$ та $g(t)$ неможливо без додаткових відомостей про її властивості.

В цьому випадку імпульсна характеристика на всьому проміжку не залежить від t : $h(\tau, t) = h(\tau)$, що приводить до математичної моделі, у якій використовується рівняння типу згортки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) s(\tau) d\tau = g(t) \quad (10)$$

або $h \cdot S = g$. Простота розв'язання рівнянь такого типу (як щодо $s(t)$, так і щодо $h(t)$) робить цей підхід досить ефективним у багатьох прикладних задачах.

Математичні моделі, побудовані на підставі рівнянь такого типу, дають можливість з необхідною точністю вивчати процеси в неоднорідних середовищах зі змінними параметрами, що відкриває нові можливості для їх дослідження.

Сингулярні інтегральні рівняння з некарлемановськими зсувами відносяться до ширшого класу рівнянь по відношенню до звичайних сингулярних інтегральних рівнянь, і, відповідно, дають можливість окреслити ще ширший клас лінійних систем зі змінними параметрами. Зсув аргументу в рівняннях такого типу відповідає різним особливостям в поведінці лінійних систем (зображення об'єктів, ефект Доплера, модуляція сигналів і т. д.).

Розглянемо сингулярні інтегральні рівняння СІР з чисто статичними ядрами на відрізках дійсної осі $[\alpha, \beta]$.

$$A(x) \int_{\alpha}^x \frac{v(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\lambda}} + B(x) \int_x^{\beta} \frac{v(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{\lambda}} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (11)$$

Граничні значення допоміжної кусочно-голоморфної функції

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} v(\tau) S_b^{\lambda}(z, \tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} v(\tau) \left(\frac{\beta-z}{\tau-z} \right)^{\lambda} d\tau$$

обчислюються за формулами

$$\Phi^{\pm}(x) = e^{\pm i\pi\lambda} \int_{\alpha}^x v(\tau) S_b(t, \tau) d\tau + \int_x^{\beta} v(\tau) S_b(x, \tau) d\tau.$$

За їхньою допомогою отримаємо крайову умову задачі Рімана $\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x)$.

$$G(x) = \frac{A(x) - e^{i\pi\lambda} B(x)}{A(x) - e^{-i\pi\lambda} B(x)}; \quad g(x) = \frac{2i \sin \pi\lambda (\beta-x)^{\lambda} f(x)}{A(x) - e^{-i\pi\lambda} B(x)}. \quad (12)$$

За розв'язанням $\Phi(z)$ крайової задачі розв'язок $v(x)$ СІР знаходиться з рівняння Абеля [6]:

$$2i \sin \pi\lambda \int_{\alpha}^x v(\tau) \left(\frac{\beta-x}{x-\tau} \right)^{\lambda} d\tau = \widehat{O}^+(\tilde{0}) - \widehat{O}^-(\tilde{0});$$

$$2i \sin \pi\lambda \int_x^{\beta} v(\tau) \left(\frac{\beta-x}{\tau-x} \right)^{\lambda} d\tau = -e^{-i\pi\lambda} \Phi^+(x) + e^{i\pi\lambda} \Phi^-(x).$$

Запишемо рівняння (11) у вигляді СІР з ядром Коші:

$$A_1(x)\mu(x) + \frac{B_1(x)}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\xi-x} = f_1(x); \quad (13)$$

$$A_1(x) = A(x) - B(x) \cos \pi\lambda; \quad B_1(x) = i \sin \pi\lambda B(x); \quad f_1(x) = (\beta-x)^{1-\lambda} f(x)$$

щодо функції

$$\mu(x) = (\beta-x)^{1-\lambda} \int_{\alpha}^x \frac{v(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\lambda}} = \frac{1}{\beta-x} \int_{\alpha}^x \left(\frac{\beta-x}{x-\tau} \right)^{\lambda} v(\tau) d\tau.$$

СІР (13) в свою чергу, еквівалентно крайовій задачі Рімана

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g_1(x); \quad (14)$$

$$G(x) = \frac{A_1(x) - B_1(x)}{A_1(x) + B_1(x)} = \frac{A(x) - e^{i\pi\lambda} B(x)}{A(x) - e^{-i\pi\lambda} B(x)}; \quad g_1(x) = \frac{f_1(x)}{A_1(x) + B_1(x)} = \frac{(\beta-x)^{\lambda-1} f(x)}{A(x) - e^{i\pi\lambda} B(x)}.$$

Як і очікувалося, задача Рімана (14) має той самий коефіцієнт $G(x)$, що і задача (11).

Поведінка на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$ шуканого розв'язку $\Phi(z)$ крайової задачі Рімана [7] залежить від поведінки функції $\mu(x)$. Якщо розв'язок $v(x)$ СІР (14) допускає в точках α і β інтегровані особливості, то відповідна йому функція $\mu(x)$ задовольняє на інтервалі (α, β) умові H з показником більшим, ніж $1-\lambda$ і допускає в точках α і β особливості порядків менших, ніж λ і 1 , відповідно. З іншого боку, якщо функція $\mu(x)$ (різниця граничних значень розв'язку крайової за-

дачі Рімана) задовольняє умові H з показником більшим, ніж $1 - \lambda$ на інтервалі (α, β) і допускає в точках α і β особливості порядків менших, ніж λ і 1 , то відповідний їй розв'язок $v(x)$ має в точках α і β інтегровані особливості.

Будемо вважати, що коефіцієнти $A(x), B(x)$ рівняння (14) задовольняють H з показником, більшим, ніж $1 - \lambda$, права частина $f(x)$ задовольняє тим самим умовам H на інтервалі (α, β) і допускає в точках α і β особливості порядків менших, ніж λ . Крім того, нехай виконується умова

$$\Omega(x) = A_1^2(x) + B_1^2(x) = A^2(x) - 2 \cos \pi \lambda A(x)B(x) + B^2(x) \neq 0.$$

Очевидно, що $|G(x)| = 1$. Позначимо через $\theta(x) = \arg G(x)$ таку гілку багатозначної функції, що $-2\pi < \theta(\alpha) \leq 0$. Тоді, якщо $\theta(\alpha) < 2\pi\lambda$, то можна отримати необмежений на границі $x = \alpha$ розв'язок крайової задачі Рімана; якщо ж $\theta(\alpha) \geq 2\pi\lambda$, то розв'язок задачі Рімана має бути обмеженим на цій границі. На границі $x = \beta$ розв'язок крайової задачі може бути необмеженим. Припущення про гелдеровські властивості коефіцієнтів і правій частині рівняння [10] забезпечить належність різниці граничних значень розв'язку крайової задачі Рімана класу H з показником більшим, ніж $1 - \lambda$.

Дослідження термомеханічних процесів у виробках з покриттям під час їх обробки і експлуатації для визначення умов утворення дефектів відшарування покриттів від основного матеріалу та їх усунення з урахуванням фізико-механічного стану поверхневого шару, показують, що ці процеси описуються сингулярними інтегральними рівняннями щодо шуканих стрибків напружень в околі технологічних неоднорідностей. Так, наприклад, для збільшення довговічності поршневої групи використовують зносостійкі покриття, з нанесенням яких мають місце часткові відшарування, які будучи концентраторами напружено-деформованого стану призводять до виникнення сколів і, відповідно, до передчасного руйнування.

Викладення основного матеріалу

Знайдемо, за яких параметрів відшарування, пов'язаних з шорсткістю робочої поверхні циліндра, а також фізико-механічних властивостей покриття і матеріалу циліндра, відбувається руйнування саме покриття.

Розрахункова схема для визначення напружено-деформованого стану системи циліндр-покриття показана на рис. 1.

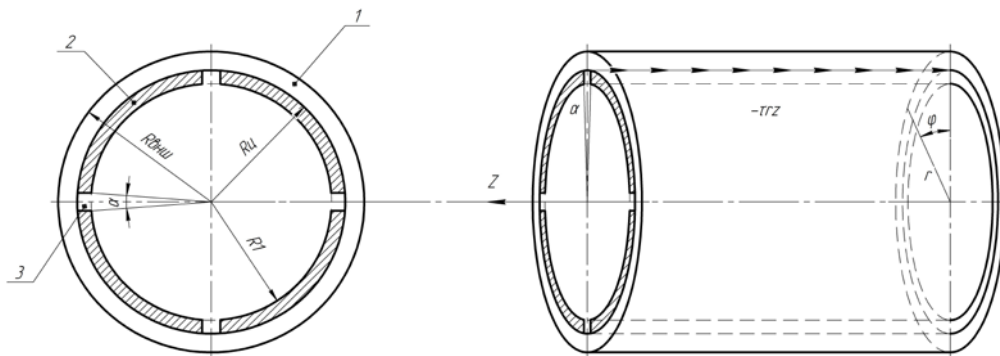


Рис. 1. Розрахункова схема: 1 — тіло циліндра; 2 — тіло покриття; 3 — ділянки відсутності (відшарування) покриття

Позначимо через $U_z^{(i)}, U_r^{(i)}, U_\phi^{(i)}$ переміщення точок системи циліндр-покриття в напрямку відповідних координат циліндричної системи (z, r, ϕ) . Оскільки під дією технологічних напружень зчеплення τ_{rz} в системі матриця-покриття (рис. 1: 1, 2) відмінними від нуля будуть переміщення $U_z(r, \phi)$, то рівняння Ламе запишеться у вигляді [8]

$$\mu^{(i)} \nabla^2 U_z^{(i)} = \mu^{(i)} \left(\frac{\partial^2 U_z^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_z^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U_z^{(i)}}{\partial \phi^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Якщо $U_z(r, \phi) = W(r, \phi)$, $0 \leq r \leq R_z$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$, рівняння (15) набуде вигляду

$$\Delta W(r, \phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} = 0. \quad (16)$$

Граничні умови $\tau_{rz}|_{z=R_2} = 0, \quad (17)$

$$\tau_{rz}(R_1 - 0, \phi) = \tau_{rz}(R_1 + 0, \phi) = -\tau_{cz}, |\phi| \leq \alpha. \quad (18)$$

Умови на дефекті $W(R_1 - 0, \phi) - W(R_1 + 0, \phi) = \begin{cases} \chi(\phi), & -\alpha \leq \phi \leq \alpha, \\ 0, & |\phi| > \alpha. \end{cases} \quad (19)$

Умови нерозривності дотичних напружень на границі циліндр-покриття:

$$\tau_{rz}(R_1 - 0, \phi) = G_1 \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R_1-0}; \quad \tau_{rz}(R_1 + 0, \phi) = G_2 \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R_1+0};$$

$$\tau_{rz}(R_1 - 0, \phi) - \tau_{rz}(R_1 + 0, \phi) = G_1 \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R_1-0} - G_2 \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R_1+0} = G_1 \langle W'(R_1, \phi) \rangle - (G_2 - G_1) \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{R_1} = 0.$$

З останнього виразу отримаємо:

$$\langle W'(R_1, \phi) \rangle \geq h W'(R_1 + 0, \phi); \quad h = \frac{G_2 - G_1}{G_1}. \quad (20)$$

Рівняння (15)—(20) складають антиплоску задачу для системи циліндр-покриття з урахуванням дефекту типу відшарування, яке виникає через шорсткість робочої поверхні циліндра або його некруглості.

Для розв'язання задачі (15)—(20) скористаємося кінцевим перетворенням Фур'є за змінною ϕ , що визначається формулами:

$$W_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi} W(r, \phi) d\phi; \quad W(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} W_n(r); \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W^{(k)}(r, \phi) e^{-in\phi} d\phi = (in)^k W_n(r). \quad (21)$$

Отримаємо одновимірну розривну крайову задачу

$$L_2[W_n(r)] = rW_n''(r) + W_n'(r) - \frac{n^2}{r}W_n(r) = 0: \quad (22)$$

– з крайовими умовами

$$W_n(0) = A < \infty; \quad W_n'(R_2) = 0; \quad (23)$$

– умовами на дефекті

$$W_n(R_1 - 0) - W_n(R_1 + 0) \leq W_n(R_1) \leq \chi_n; \quad \chi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \chi(\psi) e^{-in\psi} d\psi; \quad (24)$$

– умовами нерозривності дотичних напружень при переході через границю системи циліндр-покриття

$$\langle W_n'(R_1) \rangle \geq h W_n'(R_1 + 0). \quad (25)$$

Розв'язок розривної задачі можна отримати у вигляді

$$W_n(r) = \int_0^{R_2} G(r, \rho) f(\rho) d\rho + \sum_{j=0}^1 r_j W_{n,j}(r), \quad (26)$$

якщо побудувати функцію Гріна $G(r, \rho)$. Причому сама функція Гріна від $f(\rho)$ не залежить (в нашому випадку $f(\rho) = 0$). З огляду на самоспряження оператора L_2 функція Гріна повинна бути симетричною, тобто $G(r, \rho) = G(\rho, r)$. Ця властивість спрощує побудову функції Гріна.

Шукана функція Гріна для цієї задачі повинна мати вигляд

$$G(r, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{2nR_2^{2n}} r^n (\rho^n + R_2^{2n} \rho^{-n}), & \rho \leq r, \\ \frac{1}{2nR_2^{2n}} \rho^n (r^n + R_2^{2n} r^{-n}), & \rho \geq r. \end{cases} \quad (27)$$

Скористаємося отриманим виразом функції Гріна для побудови розривного розв'язку задачі (22)—(25). Необхідно, щоби $G(r, \rho)$ задовольняла співвідношенням (18)—(19). Тоді розв'язок розривної задачі можна записати у вигляді:

$$W_n(r) = \int_0^{R_2} G(r, \rho) f(\rho) d\rho + R_1 \left[hW_n'(R_1 + 0)G(r, R_1) - \chi_n G^{0,1}(r, R_1) \right].$$

Після відповідних перетворень останній вираз запишеться у такому вигляді:

$$W_n(r) = R_1 \left[hW_n'(R_1 + 0) \frac{1}{2nR_2^{2n}} \left\{ \begin{array}{l} r^n (R_1^n + R_2^{2n} R_1^{-n}), \quad r \leq R_1, \\ R_1^n (r^n + R_2^{2n} r^{-n}), \quad R_1 \leq r \end{array} \right\} - \chi_n \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^n}{2R_2^{2n}} (R_1^{n-1} + R_2^{2n} R_1^{-n-1}), \quad r \leq R_1, \\ \frac{R_1^{n-1}}{2R_2^{2n}} (r^n + R_2^{2n} r^{-n}), \quad r \geq R_1 \end{array} \right\} \right]. \quad (28)$$

Перевірка виконання умов (24) і (25) може підтвердити правильність побудованого розв'язку $W_n'(r)$ за змінною $r = R_1 + 0$

$$W_n'(R_1 + 0) = \frac{n(1 - \gamma^{2n})}{2R_1 \left[1 + \frac{h}{2(1 - \gamma^{2n})} \right]} \chi_n; \quad \gamma^{2n} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n}. \quad (29)$$

З урахуванням формули (29) для $W_n'(R_1 + 0)$ і відповідних перетворень шукані переміщення в трансформантах $W_n(r)$ запишуться так:

$$W_n(r) = \frac{\chi_n}{h(\gamma^{2n} - 1) - 2} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{r}{R_1} \right)^n (\gamma^{2n} - 1)(h + 1), \quad r \leq R_1, \\ \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \left[\left(\frac{r}{R_2} \right)^{2n} + 1 \right], \quad r > R_1 \end{array} \right]. \quad (30)$$

У зв'язку з тим, що $W(r, \phi)$ і $\chi(\phi)$ є непарними функціями по ϕ перейдемо до кінцевих \sin -перетворень Фур'є для цих функцій

$$\begin{aligned} W_n(r) &= \frac{i}{\pi} W_n^s(r); \quad W_n^s(r) = \int_0^\pi W(r, \phi) \sin(n\phi) d\phi; \\ \chi_n &= \frac{i}{\pi} \chi_n^s; \quad \chi_n^s = \int_0^\pi \chi(\psi) \sin(n\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (31)$$

Користуючись зворотним \sin -перетворенням Фур'є, знаходимо оригінал шуканих переміщень і, реалізуючи формулу $\sin(n\phi)\sin(n\psi) = \frac{1}{2} [\cos n(\phi - \psi) - \cos n(\phi + \psi)]$ і те, що $i^2 = -1$, вираз для $W(r, \phi)$, можна привести до вигляду

$$W_n(r, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\alpha \chi(\psi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\phi - \psi) - \cos n(\phi + \psi)}{2 + h(1 - \gamma^{2n})} \left\{ \left(\frac{r}{R_1} \right)^n (\gamma^{2n} - 1)(\chi + 1), r \leq R_1, \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \left[\left(\frac{r}{R_2} \right)^{2n} + 1 \right], r > R_1 \right\} \right] d\psi. \quad (32)$$

З невиконаних граничних умов залишилося умова (19), що характеризує зчеплення покриття з матеріалом циліндра. Задовольнимо ці умови:

$$\tau_{rz}(R_1 - 0, \phi) = G_1 \left. \frac{\partial W(r, \phi)}{\partial r} \right|_{r=R_1-0} = \frac{(h+1)G_1}{2\pi^2} \int_0^\alpha \chi(\psi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\phi - \psi) - \cos n(\phi + \psi)}{2 + h(1 - \gamma^{2n})} \cdot n(\gamma^{2n} - 1) \right] d\psi = -\tau_{cy}. \quad (33)$$

В останньому виразі виділимо головну і регулярні частини для визначення невідомої функції $\chi(\phi)$. Для цього введемо до розгляду вираз

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left\{ \frac{(h+1)G_1}{2\pi^2(2+h)} \int_0^\alpha \chi(\psi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\phi - \psi)}{n} - \frac{\cos n(\phi + \psi)}{n} + \frac{(A+1)\gamma^{2n}}{(1+A\gamma^{2n})} (\cos n(\phi + \psi) - \cos n(\phi - \psi)) \right] d\psi \right\}; \quad (34)$$

$$A = \frac{G_2 - G_1}{G_2 - 3G_1}.$$

У виразі (34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\phi - \psi)}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos(\phi - \psi))}$ носить сингулярний особливий характер.

Частина, що залишилася є правильною. Позначимо через $R(\phi, \chi)$ регулярну частину (34)

$$R(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A+1)\gamma^{2n}}{(1+A\gamma^{2n})n} \left(\cos n(\phi + \psi) - n(\phi - \psi) + \ln \sin \left| \frac{\phi + \psi}{2} \right| \right). \quad (35)$$

У цих позначеннях отримаємо інтегро-диференціальні рівняння щодо шуканої функції $\chi(\phi)$.

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left\{ \frac{(\chi+1)G_1}{2\pi^2(2+\chi)} \int_0^\alpha \chi(\psi) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2[1 - \cos(\phi - \psi)]} + R(\phi - \psi) \right] d\psi \right\} = -\tau_{cy}. \quad (36)$$

Позначивши через $f = -\frac{2\tau_{cy}\pi^2(h+2)}{G_1(h+1)}$ та перетворивши сингулярну частину інтегро-диференціального рівняння (36) до вигляду $\ln \frac{1}{|\phi - \psi|}$, отримаємо:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \int_{-\alpha}^\alpha \chi(\psi) \left[\ln \frac{1}{|\phi - \psi|} + R(\phi, \psi) \right] d\psi = f.$$

Перетворимо межі інтегрування $[-\alpha, \alpha]$ до $[-1, 1]$ заміною $\psi = \tau\alpha$. Тоді рівняння можна записати так:

$$\frac{\alpha d^2}{d\phi^2} \int_{-1}^1 \chi(\alpha\tau) \left[\ln \frac{1}{|\phi - \alpha\tau|} + R(\phi, \alpha\tau) \right] d\tau = f. \quad (37)$$

Скористаємося спектральним співвідношенням [8]:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -\pi(n+1)U_n(x).$$

Звідси випливає, що невідому функцію $\chi(\alpha\tau)$ слід визначати у вигляді

$$\chi(\alpha\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{1-(\alpha\tau)^2} U_m(\alpha\tau) C_m. \quad (38)$$

де $U_m(\alpha\tau)$ — многочлени Чебишева 2 роду; C_m — невідомі коефіцієнти.

Використовуючи властивість ортогональності многочленів Чебишева, отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь щодо шуканого розв'язку:

$$N_n G_n \chi_n + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \chi_m = f_n, \quad n, m = 1, \infty, \quad (39)$$

$$\text{де } \chi_n = \frac{1}{\ln 2U_n}; \quad f_n = C_n B \alpha \int_{-1}^1 U_n^2(\alpha\tau) (1-(\alpha\tau)^2) d\tau; \quad G_n = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^1 U_n^2(\alpha\tau) (1-(\alpha\tau)^2) d\tau; \quad N = U_n^2.$$

Систему (39) розв'язуємо, використовуючи метод редукції, тобто замінюючи (39) на кінцеву систему алгебраїчних рівнянь

$$N_n G_n \chi_n + \sum_{m=0}^N d_{nm} \chi_m = f_n, \quad n, m = 0, N, \quad (40)$$

$$\text{де } d_{nm} = \alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-(\alpha\tau)^2) U_m(\alpha\tau) R(\phi, \alpha\tau) d\tau d\phi. \quad (41)$$

У розглянутій задачі практичний інтерес становить коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) на краях відшарування за умов: $\phi = -\alpha - 0$ і коли $\phi = \alpha + 0$, тобто

$$K_{III}^- = \lim_{\phi \rightarrow -\alpha-0} \sqrt{2\pi(-\alpha-\phi)} \tau_{rz}(R_1, \phi); \quad (42)$$

$$K_{III}^+ = \lim_{\phi \rightarrow \alpha+0} \sqrt{2\pi(\phi-\alpha)} \tau_{rz}(R_1, \phi). \quad (43)$$

Або з урахуванням заміни $\phi = \alpha\phi'$ і симетрії ці співвідношення набудуть вигляду

$$K_{III}^{\mp} = \lim_{\phi' \rightarrow \mp 1 \mp 0} \sqrt{2\pi\alpha(\mp 1 \mp \phi')} \tau_{rz}(R_1, \alpha\phi')$$

і при цьому згідно з (33) і (34)

$$\tau_{rz}(R_1, \alpha\phi') = \frac{-(h+1)G_1}{2\pi^2(2+h)\alpha} \cdot \frac{d^2}{d\phi'^2} \int_{-1}^1 X(\alpha\phi') \left[\ln \frac{1}{|\phi' - \psi'|} + R_1(\alpha\phi', \alpha\psi') \right] d\psi'. \quad (44)$$

Регулярна частина в силу своєї безперервності не внесе будь-якого вкладу в трансформанту КІН, і тому її можна відкинути. В результаті отримаємо:

$$K_{III}^{\mp} = \lim_{\phi' \rightarrow \mp 1 \mp 0} \sqrt{2\pi\alpha(\mp 1 \mp \phi')} A \frac{d^2}{d\phi'^2} \int_{-1}^1 X(\alpha\phi') \ln \frac{1}{|\phi' - \psi'|} d\psi'; \quad A = -\frac{(h+1)G_1}{2\pi^2\alpha(2+h)}.$$

Підставивши сюди (19), отримаємо:

$$K_{III}^{\mp} = \lim_{\phi' \rightarrow \mp 1 \mp 0} \sqrt{2\pi\alpha(\mp 1 \mp \phi')} \cdot A \frac{d^2}{d\phi'^2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \int_{-1}^1 \sqrt{1-(\alpha\psi')^2} U_m(\alpha\phi') \ln \frac{1}{|\phi' - \psi'|} d\psi'. \quad (45)$$

Щоби виконати граничний перехід (45) необхідно продовжити спектральне співвідношення на інтервал $|\phi'| > 1$. Для цього скористаємося співвідношенням (10.2) з [9]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi'^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\phi' - \psi'|} \sqrt{1-(\alpha\psi')^2} U_m(\alpha\phi') d\psi' &= \frac{2^{m+2}(m+1)^2}{(\phi'-1)^{m+2} m!} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} + m, m+2; \frac{3}{2}; \frac{\phi'+1}{\phi'-1}\right) = \\ &= -\frac{2^{m+1}(m+1)}{(\phi'-1)^{m+2}} \sqrt{\frac{1-\phi'}{-\phi'-1}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2} + m, m+1; \frac{1}{2}; \frac{\phi'+1}{\phi'-1}\right), \end{aligned}$$

де $|\phi'| > 1$; ${}_2F_1\left(\frac{3}{2} + m, m + 1; \frac{1}{2}; \frac{\phi' + 1}{\phi' - 1}\right)$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

За цим співвідношенням легко обчислити КІН K_{III}^{\mp} . Для цього скористаємося формулами (42), (43) та (45)

$$A^{-1}K_{III}^{\mp} = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sqrt{m+1} \Psi_m, \tag{46}$$

$$\text{де } \Psi_m = 2^{m+1} (m+1) \left[\frac{m+1}{m!} {}_1F_1\left(\frac{3}{2} + m, m + 2; \frac{3}{2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{3}{2} + m, m + 1; \frac{1}{2}\right) \right].$$

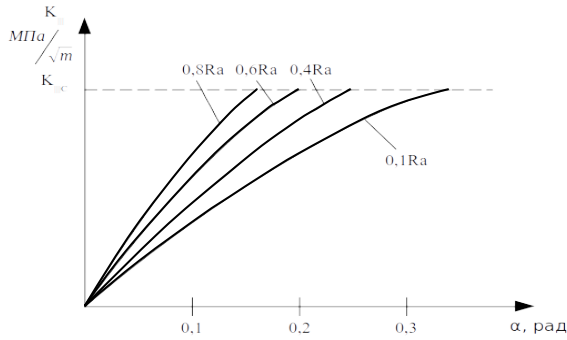


Рис. 1. Залежність КІН від кута відшарування α і шорсткості робочої зони циліндричної поверхні Ra

Використовуючи кореляційний зв'язок шорсткості робочої зони циліндра з величиною $(-\alpha, \alpha)$ ділянки відшарування покриття за різних фінішних операцій: шліфування (чистовому і фінішному), полірування, знайдемо залежність КІН $K_{III} = f(\alpha)$ (рис. 2) [10], [11].

Для цього за формулами (46), (42), (39), за заданим значенням τ_{adh} міцності зчеплення покриття з циліндричною поверхнею знаходимо розрахункові значення K_{III} в залежності від величини дефекту $(-\alpha, \alpha)$ відшарування за різних значень шорсткості робочої поверхні циліндру (рис. 2).

Експериментальні результати

Використання сингулярних інтегральних рівнянь дозволяє розробити технологічні критерії для управління процесом бездефектного оброблення і експлуатації циліндричних груп з покриттями і основними технологічними параметрами.

Для підтвердження аналітичної моделі проведено трібокорозійні дослідження композиційних матеріалів на основі Ni/Ni-TiO₂, які отримані методом електрохімічного осадження (рис. 3, 4) [12].

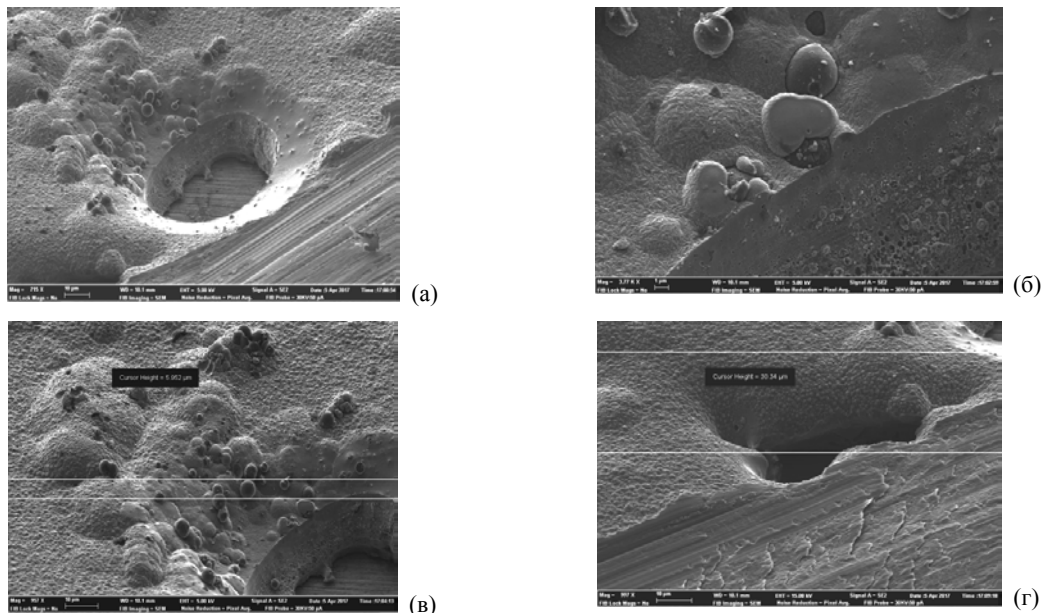


Рис. 2. Дослідження композиційних матеріалів на основі Ni/Ni-TiO₂ в скануючому електронному мікроскопі: а — порушення покриття; б — частки TiO₂; в — вимірювання діаметра частинки; г — вимірювання товщини покриття

Після проведення трібокорозійних досліджень матеріалів Ni/Ni-TiO₂ визначено, що для покриття Ni помітно збільшення глибини і ширини тріщин в залежності від збільшення навантаження за незмінного часу і впливу. При цьому профіль тріщин для покриття Ni-TiO₂ зі збільшенням навантаження

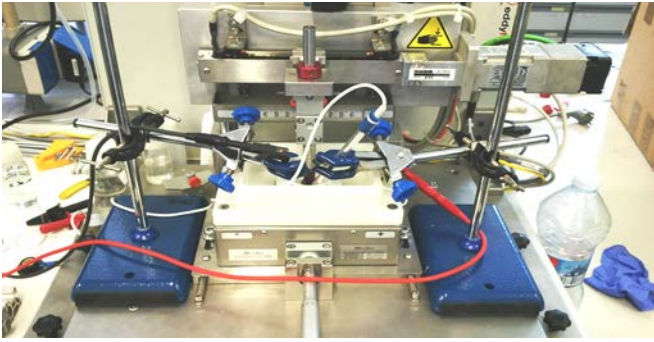


Рис. 3. Процес трибокорозійного дослідження композиційних матеріалів на основі Ni-TiO₂

і незмінним часом не змінюється. У зв'язку з цим можна виділити позитивний вплив частинок TiO₂ в покритті, які збільшують захисні функції покриття від механічного стирання, при цьому величина навантаження для Ni-TiO₂ вже не відіграє таку істотну роль у формуванні технологічних та експлуатаційних дефектів у вигляді тріщин та сколів.

Висновки

Результати моделювання з використанням сингулярних інтегральних рівнянь відкривають можливість ефективної оцінки впливу сторонніх наповнювачів на втрату функціональних властивостей неоднорідними системами. У свою чергу точне визначення порядку і характеру сингулярності поблизу вершин гострокутної недосконалості в неоднорідному середовищі, представлене в аналітичному вигляді, необхідне для формулювання і запису відповідних критеріальних співвідношень для визначення функціональних властивостей неоднорідних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи*. Москва, Российская Федерация: Наука, 1970.
- [2] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*. Москва, Российская Федерация: Наука, 1977.
- [3] Ф. Д. Гахов, *Уравнения типа свёртки*. Москва, Российская Федерация: Наука, 1978.
- [4] Г. С. Литвинчук, *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*. Москва, Российская Федерация: Наука, 1977.
- [5] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва, Российская Федерация: Наука, 1968.
- [6] В. В. Панасюк, М. П. Саврук, и З. Т. Назарчук, *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*. Киев: Наукова думка, 1984.
- [7] S. Prössdorf, *Einige Klassen Singulärer Gleichungen*. Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, 2013.
- [8] Г. Я. Попов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва, Российская Федерация: Наука, 1982.
- [9] И. С. Градштейн, и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов и произведений*. Санкт-Петербург, Россия: БХВ-Петербург, 2011.
- [10] Г. А. Оборский, А. Ф. Дашенко, А. В. Усов, и Д. В. Дмитришин, *Моделирование систем*. Одесса, Украина: Астропринт, 2013.
- [11] А. В. Усов, и А. А. Батырев, «Математическое моделирование процессов контроля покрытий элементов конструкций на базе сингулярных интегральных уравнений», *Проблемы машиностроения*, № 13 (1), с. 65-75, 2010.
- [12] M. V. Kunitsyn, and A. V. Usov, "Tribocorrosion research of NI-Al₂O₃/TiO₂ composite materials obtained by the method of electrochemical deposition," *Сучасні технології в машинобудуванні*, № 12, с. 61-69, 2017.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 16.10.2018

Усов Анатолій Васильович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем, e-mail: usov-a-v@oru.ua ;

Куніцин Максим Володимирович — аспірант кафедри вищої математики та моделювання систем, e-mail: kunicyn.maksim@gmail.com .

Одеський національний політехнічний університет, Одеса

A. V. Usov¹
M. V. Kunitsyn¹

Control of Linear Inhomogeneous Systems by the Methods of Singular Integral Equations

¹Odessa National Polytechnic University

Mathematical models of linear inhomogeneous systems based on singular integral equations depending on the location of inhomogeneities are considered. The stress-strain state of a crack-like or rigid inclusion defect is estimated using the general application of the basic principles of the plane problem of the theory of elasticity, as well as the theory of functions of

a complex variable or the method of singular integral equations. On the basis of singular integral equations with non-Carlemanian displacement, the recommended dynamic models of physical phenomena that are formed in inhomogeneous media. The possibilities of improving the reliability and durability of the cylindrical group of technological methods, including the use of coatings from wear-resistant materials on the working surfaces of cylinders are considered. Finishing products with wear-resistant coatings lead to the formation of defects on the treated surfaces, reduce the performance characteristics of these products. Analysis of the causes of the formation of chips and cracks on the surfaces of these products to be processed showed that the appearance of these defects is associated with the thermal processes that accompany the mechanical treatment. An analytical model was developed to determine the thermomechanical state of the working surface of a cylinder with a wear-resistant coating. A tribocorrosion study of composite materials based on Ni/Ni-TiO₂, obtained by the method of electrochemical deposition, was carried out. The simulation results using singular integral equations open up the possibility of an effective assessment of the effect of extraneous fillers on the loss of functional properties of inhomogeneous systems. In turn, a precise definition of the order and character of the singularity at the vertices of acute imperfections in a heterogeneous medium, pre-relations in an analytical form, is necessary to formulate and write the corresponding criterion relations for determining the functional properties of heterogeneous systems.

Keywords: mathematical model, linear systems, singular integral equations, non-Carlemanian shift, impulse response, defects.

Usov Anatolii V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics and Systems Design, e-mail: usov-a-v@opu.ua ;

Kunitsyn Maksym V. — Post-Graduate Student of the Chair of Higher Mathematics and Systems Design, e-mail: kunicyn.maksim@gmail.com

А. В. Усов¹
М. В. Куницын¹

Управление линейными неоднородными системами методами сингулярных интегральных уравнений

¹Одесский национальный политехнический университет

Рассмотрены математические модели линейных неоднородных систем на базе сингулярных интегральных уравнений в зависимости от расположения неоднородностей. Проведена оценка напряженно-деформированного состояния у дефекта типа трещины или жесткого включения с помощью общего применения основных положений плоской задачи теории упругости, а также теории функций комплексного переменного или метода сингулярных интегральных уравнений. На основе сингулярных интегральных уравнений с некарлемановским смещением рекомендованы динамические модели физических явлений, которые формируются в неоднородных средах. Рассмотрены возможности повышения надежности и долговечности цилиндрической группы технологическими методами, в том числе использование покрытий из износостойких материалов на рабочие поверхности цилиндров. Финишные методы обработки изделий с износостойкими покрытиями приводят к образованию дефектов на обрабатываемых поверхностях, снижают эксплуатационные характеристики этих изделий. Анализ причин образования сколов и трещин на обрабатываемых поверхностях указанных изделий показал, что появление этих дефектов связано с тепловыми процессами, которые сопровождают механическую обработку. Разработана аналитическая модель по определению термомеханического состояния рабочей поверхности цилиндра с износостойким покрытием. Проведено трибокоррозионное исследование композиционных материалов на основе Ni/Ni-TiO₂, полученных методом электрохимического осаждения. Результаты моделирования с использованием сингулярных интегральных уравнений открывают возможность эффективной оценки воздействия посторонних наполнителей на потерю функциональных свойств неоднородными системами. В свою очередь, точное определение порядка и характера сингулярности у вершин остроугольного несовершенства в неоднородной среде, представленное в аналитическом виде, необходимо для формулирования и описывания соответствующих критериев соотношений для определения функциональных свойств неоднородных систем.

Ключевые слова: математическая модель, линейные системы, сингулярные интегральные уравнения, некарлемановский сдвиг, импульсная характеристика, дефекты.

Усов Анатолий Васильевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и моделирования систем, e-mail: usov-a-v@opu.ua ; kunicyn.maksim@gmail.com ;

Куницын Максим Владимирович — аспирант кафедры высшей математики и моделирования систем, e-mail: kunicyn.maksim@gmail.com