

О. Б. Мокін¹
 В. Б. Мокін¹
 Б. І. Мокін¹
 І. О. Чернова¹

ДО ПИТАННЯ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТАЦІОНАРНОГО ЧАСОВОГО РЯДУ

¹Вінницький національний технічний університет

Доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду є модель авторегресії – ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій і по складовій ковзного середнього. В доведенні використано той факт, що динамічна система, аби бути керованою в режимі забезпечення стійкості, не може описуватись диференціальним рівнянням, що має порядок нижчий за третій. При переході від похідних до різниць відповідного порядку диференціальне рівняння третього порядку трансформується у різницеве рівняння третього порядку відносно відліків вихідного сигналу динамічної системи. Саме з цього різницевого рівняння, як наслідок, випливає третій порядок авторегресійної складової для вихідної координати цієї динамічної системи, якщо у вихідному сигналі, який дискретизується, а тому перетворюється у часовий ряд, враховувати і випадкову складову. А для доведення, що третій порядок складової ковзного середнього в математичній моделі авторегресії – ковзного середнього, є оптимальним, використано той факт, що будь-який стаціонарний стохастичний вхідний сигнал динамічної системи можна синтезувати, використовуючи модель фільтра, на вхід якого подається зважена сума імпульсів білого шуму зі сталим спектром, та той факт, доведений авторами цієї статті, що у цій зваженій сумі імпульсів білого шуму за оптимального вибору ваг достатньо утримувати лише імпульс, який генерується в момент часу, що спостерігається, та два попередні імпульси, що передують цьому моменту. І оскільки ця зважена сума трьох імпульсів білого шуму є моделлю ковзного середнього для авторегресійної моделі динамічного об'єкта, на вході якого діє сигнал у вигляді часового ряду, то це і є доказом того, що оптимальним порядком математичної моделі дискретизованого вихідного сигналу динамічної системи у вигляді авторегресії – ковзного середнього і по складовій ковзного середнього є третій.

Ключові слова: стаціонарний часовий ряд, динамічна система, вихідний сигнал, модель авторегресії – ковзного середнього, білий шум.

Постановка задачі та вихідні передумови

В роботі [1] авторами запропоновано метод ідентифікації математичної моделі стаціонарного часового ряду у вигляді авторегресії – ковзного середнього (АРКС), який є узагальненням підходу до ідентифікації цього класу моделей, викладеного в роботі [2]. Як приклад, за допомогою якого розкрито алгоритм методу ідентифікації, запропонованого в роботі [1], використано модель АРКС (3,3), тобто, модель

$$z_t = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2 z_{t-2} + \lambda_3 z_{t-3} + \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3}, \quad (1)$$

де z_t — центроване значення стаціонарного часового ряду в момент часу t , ξ_t — імпульс білого шуму з дисперсією σ_ξ^2 , згенерований в той самий момент часу t , $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — параметри авторегресії, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — параметри ковзного середнього.

В цій роботі ми доведемо, що модель АРКС (3,3), яка має вигляд (1), є оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду і може використовуватись завжди, коли немає якихось додаткових апріорних умов, що її спрощують.

Розв'язання поставленої задачі

Нехай процес, що відбувається у багатовимірному динамічному об'єкті, описується диференціальними рівняннями, що має вигляд

$$a_n \frac{d^n z}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = b_0 x. \quad (2)$$

Задаючи у рівнянні (2) по черзі $n=1$, $n=2$, $n=3$, перетворюючи отримані рівняння по Лапласу [3] і беручи відношення перетвореного по Лапласу вихідного сигналу $z(p)$ до перетвореного по Лапласу вхідного сигналу $x(p)$, отримаємо послідовність передаточних функцій об'єкта.

А в роботі [3] показано, що процеси в лінійних мінімально-фазових динамічних системах високого порядку, що не мають зворотних зв'язків і ПД-регуляторів у структурі, описуються в загальному випадку передаточними функціями

$$W_1(p) = \frac{b_0}{a_1 p + a_0}; \quad (3)$$

$$W_2(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}; \quad (4)$$

$$W_3(p) = \frac{b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (5)$$

з яких підстановкою $p = j\omega$ отримаємо послідовність амплітудно-фазо-частотних характеристик (АФЧХ):

$$W_1(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega}; \quad (6)$$

$$W_2(j\omega) = \frac{b_0}{(a_0 - a_2\omega^2) + ja_1\omega}; \quad (7)$$

$$W_3(j\omega) = \frac{b_0}{(a_0 - a_2\omega^2) + j(a_1\omega - a_3\omega^3)}. \quad (8)$$

У свою чергу, представляючи ці АФЧХ у показниковій формі, тобто, у вигляді

$$W_i(j\omega) = A_i(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}, \quad i=1, 2, 3, \quad (9)$$

знайдемо, що

$$A_1(\omega) = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + \omega^2}}; \quad \phi_1(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{a_0}; \quad (10)$$

$$A_2(\omega) = \frac{b_0}{\sqrt{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2}}; \quad \phi_2(\omega) = -\arctg \frac{a_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2}; \quad (11)$$

$$A_3(\omega) = \frac{b_0}{\sqrt{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3)^2}}; \quad \phi_3(\omega) = -\arctg \frac{a_1\omega - a_3\omega^3}{a_0 - a_2\omega^2}. \quad (12)$$

Аналогічно можна записати і амплітудну частотну (АЧХ) $A_n(\omega)$ та фазову частотну (ФЧХ) $\phi_n(\omega)$ характеристики об'єкта за розмірності його математичної моделі n більшої трьох.

Як відомо [3], знаючи АЧХ та ФЧХ, можна побудувати і логарифмічні амплітудну частотну (ЛАЧХ) $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ та фазову частотну (ЛФЧХ) $\phi_i(\omega)$ характеристики, в яких $i=1, 2, 3, \dots, n$, а частота на осі частот відкладається у логарифмічному масштабі. На рис. 1 показа-

ні графіки орієнтовної ЛАЧХ об'єкта з розмірністю, більшою трьох, та двох орієнтовно-можливих ЛФЧХ цього ж об'єкта.

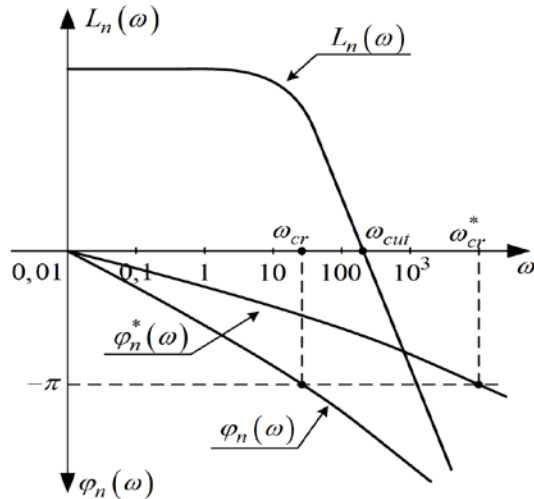


Рис. 1. Графіки орієнтовної ЛАЧХ багатовимірною об'єкта та двох орієнтовно-можливих його ЛФЧХ

На цих графіках ми бачимо дві характерні частоти спектра об'єкта — критичну ω_{cr} , для якої виконується рівність

$$\phi_n(\omega_{cr}) = -\pi, \quad (13)$$

та частоту зрізу ω_{cut} , для якої виконується рівність

$$L_n(\omega_{cut}) = 0. \quad (14)$$

Як показано на рис. 1, ці частоти можуть співвідноситись одна з одною відповідно до нерівностей (15), (16)

$$\omega_{cr} < \omega_{cut}; \quad (15)$$

$$\omega_{cr} > \omega_{cut}. \quad (16)$$

Згідно з логарифмічною інтерпретацією критерію Найквіста [3], при виконанні нерівності (15) динамічний об'єкт, стійкий у розімкненому стані, залишається стійким і після його замикання негативним зворотним зв'язком

зв'язком, який має місце завжди, коли синтезується система автоматичного керування цим об'єктом. А згідно з цим же критерієм при виконанні нерівності (16) динамічний об'єкт, стійкий у розімкненому стані, стає нестійким після його замикання негативним зворотним зв'язком. У першому випадку затухаючий характер перехідних процесів в об'єкті, викликаних якимось збуренням, має місце і у розімкнутому об'єкті і після його замикання негативним зворотним зв'язком. А у другому випадку, незважаючи на затухаючий характер перехідних процесів, викликаних якимось збуренням, в розімкнутому об'єкті, після його замикання негативним зворотним зв'язком, характер перехідних процесів в ньому змінюється — стає наростаючим, роблячи цей об'єкт функціонально неспроможним. Тож використовувати математичні моделі об'єктів в задачах синтезу систем автоматичного керування ними у вигляді (2) у разі $n = 1, 2$ не можна, оскільки вони не несуть інформацію про критичну частоту спектра об'єкта, адже коли $n = 1$, матимемо ЛФЧХ об'єкта, для якої виконується нерівність

$$\phi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (17)$$

а коли $n = 2$, для ЛФЧХ об'єкта справедливою є нерівність

$$\phi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (18)$$

І лише, якщо $n = 3$ для ЛФЧХ об'єкта справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} \phi_3(\omega) &\geq -\pi, & \forall \omega \in [0, \omega_{cr}]; \\ \phi_3(\omega) &< -\pi, & \forall \omega \in (\omega_{cr}, \infty), \end{aligned} \quad (19)$$

яка несе інформацію про критичну частоту і у вигляді (13) може бути використаною для її визначення.

З вищевстановленого випливає, що в задачах управління процесами порядок математичної моделі об'єкта у вигляді (2), вибраний за критеріальною умовою збереження інформації про критичну частоту спектра об'єкта, не може бути нижчим третього, тобто, що ця модель мінімальної форми повинна мати вигляд

$$a_3 \frac{d^3 z}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = b_0 x, \quad (20)$$

і недоцільно його задавати вищим, оскільки кожна похідна вищого порядку в моделі буде вносити наростаючу похибку від диференціювання високочастотної завади.

А тепер виберемо інтервал дискретності T і, скориставшись наближеною рівністю

$$\frac{dz_t}{dt} \approx \frac{z_t - z_{t-1}}{T}, \tag{21}$$

від диференціального рівняння (20), перейдемо до різницевого рівняння

$$\frac{a_3}{T^3}(z_t - 3z_{t-1} + 3z_{t-2} - z_{t-3}) + \frac{a_2}{T^2}(z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}) + \frac{a_1}{T}(z_t - z_{t-1}) + a_0 z_t = b_0 x_t \tag{22}$$

або

$$z_t = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2 z_{t-2} + \lambda_3 z_{t-3} + \frac{b_0 T^3}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3} x_t; \tag{23}$$

$$\lambda_1 = \frac{3a_3 + 2a_2 T + a_1 T^2}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3}; \quad \lambda_2 = -\frac{3a_3 + a_2 T}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3}; \quad \lambda_3 = \frac{a_3}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3}. \tag{24}$$

Розглянемо детальніше спосіб формування сигналу x_t .

Як відомо [2], будь-який центрований сигнал x_t можна сформувати з послідовності імпульсів білого шуму $\xi_t, \xi_{t-1}, \xi_{t-2}, \dots$ з дисперсією σ_ξ^2 за допомогою фільтра з передаточною функцією

$$\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots, \tag{25}$$

в якій $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ — параметри фільтра, які можуть бути і додатними і від’ємними числами, а B — оператор зсуву на один крок назад, тобто оператор, який формує різницю

$$B\xi_t = \xi_t - \xi_{t-1}. \tag{26}$$

Тож сигнал x_t можна записати у вигляді нескінченної суми

$$x_t = \Psi(B)\xi_t = \xi_t + \psi_1 \xi_{t-1} + \psi_2 \xi_{t-2} + \psi_3 \xi_{t-3} + \dots. \tag{27}$$

Але в реальних умовах число параметрів фільтра (25), а разом з цим і число членів у послідовності (27) обмежують, тобто апроксимують нескінченну послідовність (27) скінченною послідовністю, в якій утримується лише визначена з якихось попередньо заданих критеріальних умов обмежена кількість m членів і в якій, аби відрізнити її від нескінченної послідовності (27), параметри позначають формально, ставлячи перед ними знак «мінус», тобто, сигнал x_t , використовуючи замість нескінченної послідовності (27) апроксимуючу скінченну послідовність потужністю m , записують так:

$$x_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3} - \dots - \theta_m \xi_{t-m}. \tag{28}$$

У цьому випадку логічним є запитання: «А якою кількістю членів можна обмежитись у скінченній послідовності (28) під час розв’язання практичних задач моделювання?».

Для наочності необхідних для формування відповіді на це запитання логічних викладок скористаємось графіками, показаними на рис. 2.

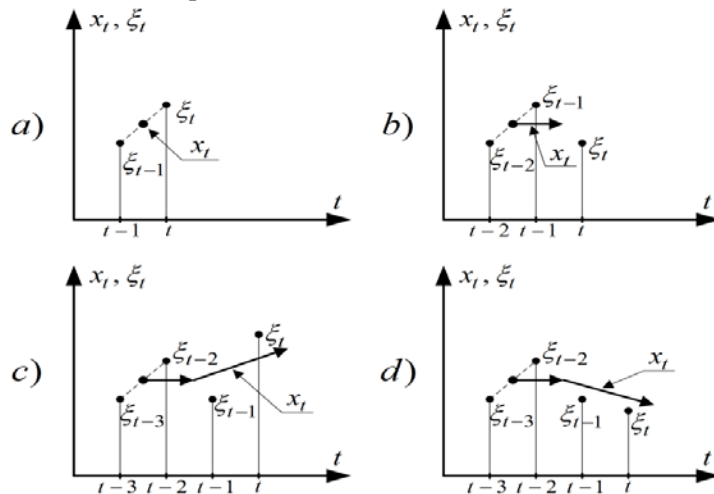


Рис. 2. Графічне обґрунтування вибору числа членів в послідовності (28)

З рис. 2а бачимо, що два значення послідовності в моменти часу $t, t-1$ дають змогу вирахувати лише точку на тренді цієї послідовності, з рис. 2б бачимо, що три значення в моменти часу $t, t-1, t-2$ дають змогу вирахувати лише напрям тренду, а з рис. 2с та 2д бачимо, що чотири значення в моменти часу $t, t-1, t-2, t-3$ дають змогу вирахувати не лише напрям тренду, але і зміну цього напрямку. І оскільки ми маємо справу в послідовності (28) з випадковими значеннями, некорельованими один з одним, то розглядати більшу кількість членів у цій послідовності не має практичного сенсу. Тож за критерієм збереження інформації про напрям і зміну напрямку тренду є сенс сигнал x_t задавати у вигляді ковзного середнього з чотирма складовими, тобто у вигляді

$$x_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3}. \quad (29)$$

Підставляючи вираз (29) у (23), будемо мати:

$$z_t = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2 z_{t-2} + \lambda_3 z_{t-3} + \frac{b_0 T^3}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3} (\xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3}). \quad (30)$$

Нехай

$$\frac{b_0 T^3}{a_3 + a_2 T + a_1 T^2 + a_0 T^3} = 1. \quad (31)$$

Знайти таке значення інтервалу дискретності T , яке задовольнить умову (31), можна завжди, оскільки воно є коренем рівняння

$$(b_0 - a_0) T^3 - a_1 T^2 - a_2 T - a_3 = 0, \quad (32)$$

в яке перетворюється ця умова (31), і яке має таку структуру, що у нього є завжди хоча б один корінь, який виражається дійсним додатним числом.

Підставляючи ж умову (31) в рівняння (30), отримуємо математичну модель стаціонарного часового ряду у формі АРКС (3,3)

$$z_t = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2 z_{t-2} + \lambda_3 z_{t-3} + \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3}, \quad (33)$$

яка збігається з моделлю (1), що і потрібно було довести.

Висновки

1. Доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду є модель авторегресії – ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього.

2. За критерії оптимальності вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта, процеси в якому моделюються, та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напрямку тренду ковзного середнього.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, та Б. І. Мокін, «Метод ідентифікації моделі авторегресії – ковзного середнього АРКС(P,Q) з довільними значеннями порядків P, Q, який узагальнює методику Юла–Уокера,» *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*. № 2, 2014. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/406>.

[2] Дж. Бокс, і Г. Дженкінс, *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*, вып. 1. Москва: Мир, 1974, 408 с.

[3] И. М. Макаров, и Б. М. Менский, *Линейные автоматические системы*. Москва: Машиностроение, 1977, 464 с.

Рекомендовано до друку кафедрою системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки ВНТУ

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Мокін Віталій Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Мокін Борис Іванович — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Чернова Ірина Олександрівна — аспірантка кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: ira.chernova85@gmail.com .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

О. В. Мокін¹
В. В. Мокін¹
Б. І. Мокін¹
І. О. Чернова¹

To the Problem of the Optimal Mathematical Model Selection of Stationary Time Series

¹Vinnitsia National Technical University

It is proved that the optimal mathematical model of a stationary time series is the autoregression – moving average model having the third order both in the autoregressive component and in the moving average component. The proof uses the fact that the dynamical system, in order to be steered in the stability mode, can not be described by a differential equation of order lower than the third. In going from derivatives to differences of the corresponding order, a third-order differential equation is transformed into a third-order difference equation relative to the samples of the output signal of the dynamic system. It is from this difference equation that, as a consequence, the third order of the autoregressive component follows for the output coordinate of this dynamic system, if the random component is also taken into account in the original signal, which is discretized, and therefore turns into a time series. And to prove that the third order of the moving average component in the mathematical model of autoregression – moving average is optimal, it is used as the fact that any stationary stochastic input signal of a dynamic system can be synthesized using a filter model whose input receives a weighted sum of white noise pulses with a constant spectrum, and the fact proved by the authors of this article that in this weighted sum of white noise pulses with an optimal choice of weights, it must only pulse generated in the observed time and two previous pulses preceding this time moment. And since this weighted sum of three white noise pulses is a moving average model for an autoregressive model of a dynamic object whose input is acted upon by a time series signal, this is the proof that the optimal order of the mathematical model of the sampled output signal of a dynamical system in the form of the autoregression – moving average and the moving average component is the third.

Keywords: stationary time series, dynamic system, output signal, autoregression – moving average model, white noise.

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Mokin Vitalii B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of System Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, Professor of the Chair of System Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Chernova Iryna O. — Post-Graduate Student of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: ira.chernova85@gmail.com

А. Б. Мокін¹
В. В. Мокін¹
Б. І. Мокін¹
І. А. Чернова¹

К вопросу выбора оптимальной математической модели стационарного временного ряда

¹Вінницький національний технічний університет

Доказано, что оптимальной математической моделью стационарного временного ряда является модель авторегрессии – скользящего среднего, имеющая третий порядок и по авторегрессионной составляющей и по составляющей скользящего среднего. В доказательстве использован тот факт, что динамическая система, для того, чтобы быть управляемой в режиме обеспечения устойчивости, не может опи-

связаться дифференциальным уравнением, имеющем порядок ниже третьего. При переходе от производных к разностям соответствующего порядка дифференциальное уравнение третьего порядка трансформируется в разностное уравнение третьего порядка относительно отсчетов выходного сигнала динамической системы. Именно из этого разностного уравнения, как следствие, вытекает третий порядок авторегрессионной составляющей для выходной координаты этой динамической системы, если в исходном сигнале, который дискретизируется, а потому превращается во временной ряд, учитывать и случайную составляющую. А для доказательства, что третий порядок составляющей скользящего среднего в математической модели авторегрессии – скользящего среднего, является оптимальным, использован как тот факт, что любой стационарный стохастический входной сигнал динамической системы можно синтезировать, используя модель фильтра, на вход которого подается взвешенная сумма импульсов белого шума с постоянным спектром, и тот факт, доказанный авторами настоящей статьи, что в этой взвешенной сумме импульсов белого шума при оптимальном выборе весов достаточно удерживать только импульс, генерируемый в наблюдаемый момент времени и два предыдущих импульса, предшествующих этому моменту. И поскольку эта взвешенная сумма трех импульсов белого шума является моделью скользящего среднего для авторегрессионной модели динамического объекта, на входе которого действует сигнал в виде временного ряда, то это и есть доказательством того, что оптимальным является третий порядок математической модели дискретизированного выходного сигнала динамической системы в виде авторегрессии – скользящего среднего и по составляющей скользящего среднего.

Ключевые слова: стационарный временной ряд, динамическая система, выходной сигнал, модель авторегрессии – скользящего среднего, белый шум.

Мокин Александр Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Мокин Виталий Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Мокин Борис Иванович — академик НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, профессор кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Чернова Ирина Александровна — аспирант кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: ira.chernova85@gmail.com