

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 517.977

В. Б. Мокін¹
 О. Б. Мокін¹
 Б. І. Мокін¹
 С. О. Довгополюк¹
 І. О. Чернова¹

ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МІНІМАЛЬНО-ФАЗОВИХ СИСТЕМ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В КЛАСІ НЕМІНІМАЛЬНО-ФАЗОВИХ

¹Вінницький національний технічний університет

Запропоновано метод синтезу еквівалентних математичних моделей мінімально-фазових динамічних систем високого порядку, до яких відносяться і вимірювальні системи зі складною структурою, в класі немінімально-фазових не вище другого порядку з алгоритмом ідентифікації, зануреним в частотну область.

Ключові слова: мінімально-фазові системи, вимірювальні системи, математичні моделі, високий порядок, немінімально-фазові системи, еквівалентування.

Вихідні передумови та постановка завдань дослідження

Оскільки для визначення і компенсації динамічних похибок вимірювальних систем необхідно знати їх математичні моделі у вигляді

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x, \quad n > 3, \quad (1)$$

чи у вигляді

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad n > 5 \quad (2)$$

або у вигляді

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad n > 5, \quad (3)$$

де x — фізична величина, яка вимірюється, а y — вихідний сигнал вимірювальної системи, що відображає у якомусь масштабі фізичну величину, що вимірюється, то актуальною є задача синтезу таких моделей мінімального порядку, адже чим вищим є порядок моделі вимірювальної системи, тим більшим є вплив на її динамічні похибки завод, які накладаються на фізичні величини, що нею вимірюються.

В роботі [1] показано, за яких умов можна синтезувати математичні моделі мінімального порядку, не вищого другого, тобто моделі, що мають вигляд

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x, \quad (4)$$

або навіть

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x \quad (5)$$

для мінімально-фазових динамічних систем того класу, до якого відносяться і вимірювальні системи, що не мають внутрішніх зворотних зв'язків.

В роботах [2, 3] автори довели, що для динамічних систем зі зворотними зв'язками в класі мінімально-фазових, у тому числі вимірювальних, математична модель за відсутності похідних у правій частині диференціального рівняння не може мати порядок, нижчий третього, тобто модель мінімального порядку має вигляд

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x. \quad (6)$$

В роботах [4, 5] ми довели, що для динамічних систем зі зворотними зв'язками в класі мінімально-фазових, у тому числі вимірювальних, математична модель за наявності похідних у правій частині диференціального рівняння не може мати порядок, нижчий суми, що складається з порядку старшої похідної у правій частині цього рівняння та числа 3 (три), тобто модель мінімального порядку при старшій похідній у правій частині, що має перший порядок, має такий вигляд:

$$a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (7)$$

а модель мінімального порядку при старшій похідній у правій частині, що має другий порядок, має вигляд

$$a_5 \frac{d^5 y}{dt^5} + a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \quad (8)$$

Автором роботи [6] зібрані відомі на час її опублікування результати, щодо синтезу математичних моделей немінімально-фазових систем, у тому числі і мінімального порядку, не вищого другого, але з алгоритмами пошуку числових значень їх параметрів у часовій області, які не мають здатності фільтрувати вплив завад, що разом з корисними сигналами прикладаються до системи

У цій роботі, яка була представлена в якості доповіді на наукову конференцію ВКДТС-2017, ми пропонуємо метод синтезу математичних моделей динамічних систем в класі немінімально-фазових з порядком, не вищим другого, які є еквівалентними математичним моделям мінімально-фазових систем високих порядків, тобто, моделям (1)–(3), та алгоритми ідентифікації еквівалентних моделей, занурені в частотну область, чим досягається їх завадостійкість в розрахунках чисельних значень параметрів цих моделей.

Розв'язання поставлених завдань

Як відомо [7], цитуємо в перекладі з російської: «Мінімально-фазова система — це система автоматичного керування з однозначним зв'язком між її амплітудною і фазовою частотними характеристиками. Цей зв'язок (з точністю до коефіцієнта підсилення) визначається як

$$\begin{cases} \ln A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)}{u - \omega} d\omega; \\ \phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(\omega)}{u - \omega} d\omega, \end{cases} \quad (9)$$

де $A(\omega)$ — амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), а $\phi(\omega)$ — фазова частотна характеристика (ФЧХ)» — кінець першої цитати з роботи [6].

У цьому місці, посилаючись на роботу [8], нагадаємо, що за відомої передаточної функції $W(p)$ динамічної системи її АЧХ та ФЧХ знаходяться шляхом трансформації цієї передаточної функції в амплітудно-фазо-частотну характеристику (АФЧХ) $W(j\omega)$ та представлення АФЧХ, яка є функцією комплексної змінної, в показниковій формі згідно зі схемою

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = R(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \quad (10)$$

де $R(\omega)$, $Q(\omega)$ — відповідно, дійсна та уявна частотні характеристики динамічної системи, які пов'язані з АЧХ і ФЧХ співвідношеннями:

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (11)$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{R(\omega)}. \quad (12)$$

А далі наведемо другу цитату з роботи [7], яка є продовженням першої: «Співвідношення (9) мають місце, якщо передаточна функція (ПФ) $W(p)$ не має нулів і полюсів у правій півплощині, включно і на уявній осі. Однозначний зв'язок між АЧХ та ФЧХ дозволяє синтезувати мінімально-фазові системи (МФС) із заданими властивостями, використовуючи лише один вид частотних характеристик, наприклад, АЧХ. На відміну від МФС частина нулів і полюсів ПФ немінимально-фазової системи (НМФС) можуть знаходитись у правій півплощині. У зв'язку з тим, що в НМФС немає однозначного зв'язку між АЧХ та ФЧХ, при синтезі таких систем в частотній області потрібно знати обидва види характеристик. Для НМФС характерним є більший зсув по фазі на усіх частотах у порівнянні з МФС, що має таку ж АЧХ» — кінець другої цитати з роботи [7].

З вищенаведеного випливає, що передаточні функції вимірювальних систем відносяться до класу МФС, адже, якби це було не так, то за будь-якого вхідного сигналу на виході вимірювальної системи через нестійкий динамічний процес у ній, зумовлений наявністю нулів чи полюсів передаточної функції у правій півплощині комплексної змінної, ми завжди отримували б не значення, пропорційне вхідному сигналу, а те саме граничне значення, зумовлене верхньою границею вимірювальної шкали. Тож можна стверджувати, що, якщо диференціальні рівняння (1)—(3) є математичними моделями якихось вимірювальних систем, то відповідні їм передаточні функції:

$$W_1(p) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}; \quad (13)$$

$$W_2(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}; \quad (14)$$

$$W_3(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \quad (15)$$

не мають нулів і полюсів у правій півплощині комплексної змінної.

А це означає, у свою чергу, що лише за відсутності внутрішніх зворотних зв'язків, як показано нами в роботі [1], еквівалентними математичними моделями мінімального порядку з допустимими похибками для таких систем в класі МФС можуть служити передаточні функції:

$$W_{11}^{(e)}(p) = \frac{b_{01}}{a_{11} p + 1}; \quad (16)$$

$$W_{12}^{(e)}(p) = \frac{b_{02}}{a_{22} p^2 + a_{12} p + 1}, \quad (17)$$

а за наявності внутрішніх зворотних зв'язків еквівалентними математичними моделями мінімального порядку з допустимими похибками для систем з передаточними функціями (13) в класі МФС, як показано нами в роботах [2, 3], можуть служити передаточні функції

$$W_{13}^{(e)}(p) = \frac{b_{03}}{a_{33} p^3 + a_{23} p^2 + a_{13} p + 1}, \quad (18)$$

а для систем з передаточними функціями (14), (15) в класі МФС, як показано нами в роботах [4, 5], еквівалентними мінімального порядку можуть служити передаточні функції, відповідно

$$W_2^{(e)}(p) = \frac{b_{12} p + b_{02}}{a_{42} p^4 + a_{32} p^3 + a_{22} p^2 + a_{12} p + 1}; \quad (19)$$

$$W_3^{(e)}(p) = \frac{b_{23}p^2 + b_{13}p + b_{03}}{a_{53}p^5 + a_{43}p^4 + a_{33}p^3 + a_{23}p^2 + a_{13}p + 1}. \quad (20)$$

Як бачимо з виразів (18)—(20), еквівалентні передаточні функції мінімального порядку для вимірювальних систем в класі МФС теж мають досить високі порядки, принаймні, не нижче третього.

Якщо подати на вхід динамічної системи з класу МФС, процеси в якій описуються диференціальним рівнянням із множини (1)—(8) чи передаточною функцією з множини (13)—(20), вхідний сигнал $x(t)$, який описується одиничною східчастою функцією, тобто, сигнал

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \in [0, \infty); \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases} \quad (21)$$

то на виході цієї системи, як відомо [8, 9], отримаємо сигнал $y(t)$, який називають перехідною функцією цієї динамічної системи — позначимо її символом $h(t)$, яка є оберненим перетворенням Лапласа поділеної на p передаточної функції $W(p)$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} \quad (22)$$

і має графік, який в залежності від значення полюсів передаточної функції цієї системи може мати вигляд, показаний на рис. 1. На рис. 1 кривою 1 позначено графік перехідної функції системи за однакових чи близьких між собою від'ємних значень полюсів, кривою 3 позначено графік перехідної функції системи за від'ємних значень полюсів, що суттєво відрізняються модулями, а кривою 2 позначено графік перехідної функції системи, передаточна функція якої має хоча б одну пару комплексно-спряжених полюсів з від'ємними дійсними частинами.

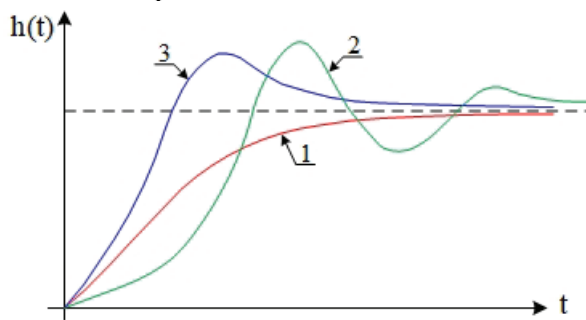


Рис. 1. Графіки перехідних функцій динамічних систем з класу МФС за різного характеру полюсів їх передаточних функцій

У роботах [6, 8] показано, що в разі еквівалентування МФС, що описуються диференціальними рівняннями (1)—(3) чи відповідними їм передаточними функціями (13)—(15), в такому підкласі НМФС, яким є системи з «чистим запізненням» на відрізок часу τ до початку процесу проходження сигналу з їх входу на вихід, то в якості еквівалентної моделі для МФС з перехідною функцією $h(t)$, позначеною на рис. 1 цифрою 1, можна використовувати диференціальне рівняння першого порядку з аргументом, що запізнюється на τ і має вигляд

$$a_1^* \frac{dy}{dt} + a_0^* y(t) = b_0^* x(t - \tau) 1(t - \tau), \quad (23)$$

для МФС з перехідною функцією $h(t)$, позначеною на рис. 1 цифрою 2, можна використовувати диференціальне рівняння другого порядку з аргументом, що запізнюється на τ і має вигляд

$$a_2^* \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1^* \frac{dy}{dt} + a_0^* y(t) = b_0^* x(t - \tau) 1(t - \tau), \quad (24)$$

а для МФС з перехідною функцією $h(t)$, позначеною на рис. 1 цифрою 3, можна використовувати теж диференціальне рівняння другого порядку, але з похідною першого порядку у правій частині та з аргументом, що запізнюється на τ , тобто, рівняння, що має вигляд

$$a_2^* \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1^* \frac{dy}{dt} + a_0^* y(t) = \left[b_1^* \frac{dx(t - \tau)}{dt} + b_0^* x(t - \tau) \right] 1(t - \tau). \quad (25)$$

Перетворюючи диференціальні рівняння (23)—(25) по Лапласу, знайдемо, що їх аналогами на комплексній площині будуть передаточні функції, відповідно

$$W_1^*(p) = \frac{b_0^*}{a_1^* p + 1} e^{-p\tau}; \tag{26}$$

$$W_2^*(p) = \frac{b_0^*}{a_2^* p^2 + a_1^* p + 1} e^{-p\tau}; \tag{27}$$

$$W_3^*(p) = \frac{b_1^* p + b_0^*}{a_2^* p^2 + a_1^* p + 1} e^{-p\tau}. \tag{28}$$

Якщо поділити передаточні функції (26)—(28) на p і застосувати до цього функціонального дробу обернене перетворення Лапласа згідно з виразом (22), то отримаємо перехідні функції $h(t)$, які матимуть такий же характер, як зображено на рис. 1 для МФС, але початок яких на осі t буде зсунутий вправо від початку системи координат на відрізок τ . Тож метод ідентифікації математичних моделей (26)—(28) в класі НМФС, еквівалентних для МФС з класу (13)—(15), запропонований в роботах [6, 8], зводиться до визначення параметрів еквівалентних моделей шляхом наближення графіків їх перехідних функцій до графіків перехідних функцій МФС, еквівалентні моделі для яких синтезуються, і складенням алгебраїчних виразів, що зв'язують ці параметри у характерних точках, однією з яких є точка перегину графіка перехідної функції МФС, еквівалентна модель для якої синтезується. Але оскільки будь-яка завада, що виникла під час експериментального визначення перехідної функції МФС, може спотворити інформацію про дійсне місцезнаходження точки перегину на її графіку, яка додатково ще й спотворюється її зоровим сприйняттям особи, що обробляє результати експерименту, то похибки у визначенні параметрів еквівалентної моделі в класі НМФС за допомогою цього методу ідентифікації можуть досягати 100%. І для підвищення точності визначення чисельних значень параметрів еквівалентних моделей нами запропоновано інший метод їх ідентифікації, алгоритм якого занурений в частотну область, а тому вільний від випадкових похибок будь-якого характеру з нульовим середнім.

При викладенні суті цього методу синтезу еквівалентних моделей в якості вихідних передумов будемо використовувати АЧХ $A(\omega)$ та ФЧХ $\phi(\omega)$, які для МФС з класу (13)—(15) вважатимемо знятими експериментально з використанням комплекту приладів для зняття частотних характеристик (КПЗЧХ), який складається з генератора синусоїдальних сигналів, подвійного пікового вольтметра та частотоміра-фазометра, що серійно випускаються промисловістю. Але будемо використовувати їх у логарифмічному варіанті, тобто, у вигляді ЛАЧХ та ЛФЧХ, де ЛАЧХ — це

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \sqrt{R^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \tag{29}$$

а ЛФЧХ $\phi(\omega)$ відрізнятиметься від ФЧХ лише логарифмічним масштабом частот на її графіку, який разом з орієнтовним графіком ЛАЧХ показано на рис. 2 для двох співвідношень частоти зрізу ω_z та критичної частоти ω_c

$$\omega_z < \omega_c; \tag{30}$$

$$\omega_z > \omega_c, \tag{31}$$

які є коренями рівнянь

$$L(\omega_c) = 0; \tag{32}$$

$$\phi(\omega_c) = -\pi. \tag{33}$$

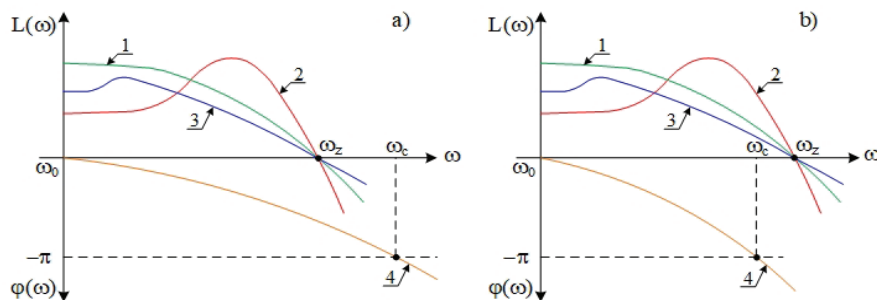


Рис. 2. Орієнтовні графіки ЛАЧХ і ЛФЧХ мінімально-фазових динамічних систем

Зауважимо, що цифри 1, 2, 3 на рис. 2 вказують на те, що цим ЛАЧХ відповідають ті ж умови формування нулів і полюсів передаточних функцій, якими породжені ці ЛАЧХ, що й на рис. 1, на якому зображені породжені цими ж передаточними функціями перехідні функції цих МФС.

В запропонованому методі ідентифікації еквівалентних моделей (26)—(28) нам потрібні будуть аналітично задані їх ЛАЧХ та ЛФЧХ. Визначимо їх. Переходячи до АФЧХ, матимемо:

$$W_1^*(j\omega) = \frac{b_0^*}{a_1^*(j\omega) + 1} e^{-j\omega\tau} = \left(\frac{b_0^*}{1 + (a_1^*\omega)^2} + j \frac{(-b_0^*a_1^*\omega)}{1 + (a_1^*\omega)^2} \right) e^{-j\omega\tau}; \quad (34)$$

$$W_2^*(j\omega) = \frac{b_0^*}{a_2^*(j\omega)^2 + a_1^*(j\omega) + 1} e^{-j\omega\tau} = \left(\frac{b_0^*(1 - a_2^*\omega^2)}{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2} + j \frac{(-b_0^*a_1^*\omega)}{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2} \right) e^{-j\omega\tau}; \quad (35)$$

$$W_3^*(j\omega) = \frac{b_1^*(j\omega) + b_0^*}{a_2^*(j\omega)^2 + a_1^*(j\omega) + 1} e^{-j\omega\tau} = \left(\frac{b_0^*(1 - a_2^*\omega^2) + b_1^*a_1^*\omega^2}{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2} + j \frac{b_1^*\omega(1 - a_2^*\omega^2) - b_0^*a_1^*\omega}{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2} \right) e^{-j\omega\tau}. \quad (36)$$

А згідно зі співвідношеннями (11) та (12) для виразів (34)—(36) матимемо:

$$A_1^*(\omega) = \frac{b_0^*}{\sqrt{1 + (a_1^*\omega)^2}}; \quad (37)$$

$$\phi_1^*(\omega) = -\arctg(a_1^*\omega) - \omega\tau; \quad (38)$$

$$A_2^*(\omega) = \frac{b_0^*}{\sqrt{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2}}; \quad (39)$$

$$\phi_2^*(\omega) = -\arctg \frac{a_1^*\omega}{1 - a_2^*\omega^2} - \omega\tau; \quad (40)$$

$$A_3^*(\omega) = \frac{\sqrt{(b_0^*)^2 + (b_1^*\omega)^2}}{\sqrt{(1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2}}; \quad (41)$$

$$\phi_3^*(\omega) = -\arctg \frac{b_0^*a_1^*\omega - b_1^*\omega(1 - a_2^*\omega^2)}{b_1^*a_1^*\omega^2 + b_0^*(1 - a_2^*\omega^2)} - \omega\tau. \quad (42)$$

Що ж до ЛАЧХ, то згідно зі співвідношенням (29) та виразами (37), (39), (41) вони виглядатимуть так:

$$L_1^*(\omega) = 20 \lg b_0^* - 10 \lg(1 + (a_1^*\omega)^2); \quad (43)$$

$$L_2^*(\omega) = 20 \lg b_0^* - 10 \lg((1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2); \quad (44)$$

$$L_3^*(\omega) = 10 \left(\lg((b_0^*)^2 + (b_1^*\omega)^2) - \lg((1 - a_2^*\omega^2)^2 + (a_1^*\omega)^2) \right). \quad (45)$$

Орієнтовні та відповідні їм асимптотичні ЛАЧХ, побудовані згідно з виразами (43)—(45), зображені на рис. 3(а, б, с). На цьому ж рисунку зображені ЛФЧХ, побудовані згідно з виразами (38), (40), (42). Як бачимо з рис. 3, точки стиків відрізків графіка асимптотичної ЛАЧХ задають ще одну характерну частоту, яку називають спряженою і позначають ω_s . На цій частоті маємо максимум відхилення реальної ЛАЧХ від асимптотичної, яка у такому випадку є її еквівалентом. Зауважимо, що частота ω_0 вибирається якомога ближчою до нуля, тоді значення $A(\omega_0)$ дорівнюватиме коефіцієнту перетворення вхідної величини x у вихідну величину y в усталеному режимі функціо-

нування МФС, а частота ω_z , на якій $A(\omega_z) = 1$, фактично є границею, за якою МФС система переходить з режиму підсилювача, який є основним для вимірювальної системи, до режиму фільтра вищих частот, який не є характерним для вимірювальної системи.

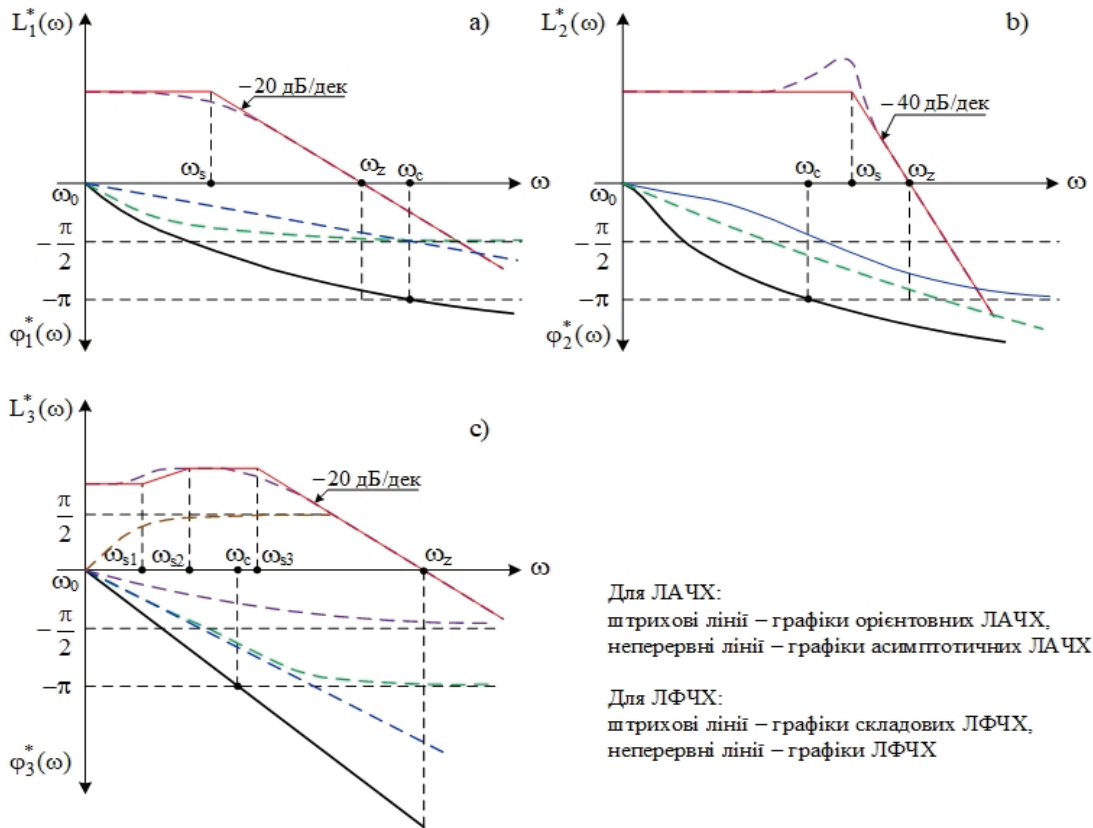


Рис. 3. Орієнтовні та асимптотичні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ немінімально-фазових динамічних систем

Тепер ми маємо усе необхідне для побудови методу синтезу еквівалентних математичних моделей МФС мінімального порядку в класі НМФС з порядком, не вищим другого, та їх ідентифікації, який ми називатимемо МСЕММІ. У цій статті розглянемо алгоритм МСЕММІ лише для випадку еквівалентування в класі НМФС моделей МФС, що не мають зворотних зв'язків, що є характерним для значної кількості вимірювальних систем. Випадки, еквівалентування в класі НМФС моделей МФС, що мають внутрішні зворотні зв'язки, будуть розглянуті нами в наступній статті, яка буде написана в розвиток ідей, закладених у цій статті.

На першому етапі алгоритму МСЕММІ необхідно, подавши на вхід МФС, що еквівалентується, одиничний східчастий сигнал, заданий виразом (21), зафіксувати її перехідну функцію $h(t)$ і, порівнявши її графік з кривими 1, 2, 3 на рис. 1, визначити характер полюсів передаточної функції, за яким визначити структуру еквівалентної передаточної функції в класі НМФС. З викладеного вище випливає, якщо отримана експериментально перехідна функція МФС має вигляд кривої 1, то еквівалентну передаточну функцію МФС в класі НМФС необхідно синтезувати у вигляді (26), якщо експериментальна перехідна функція МФС має вигляд кривої 2, то еквівалентну передаточну функцію МФС в класі НМФС необхідно синтезувати у вигляді (27), а якщо експериментальна перехідна функція МФС має вигляд кривої 3, то еквівалентну передаточну функцію МФС в класі НМФС необхідно синтезувати у вигляді (28).

На другому етапі алгоритму МСЕММІ необхідно за допомогою КПЗЧХ визначити частотні характеристики $A(\omega)$, $\phi(\omega)$ МФС, що еквівалентується, та побудувати їх графіки в логарифмічному варіанті, тобто, у вигляді ЛАЧХ та ЛФЧХ. При цьому графік ЛАЧХ для МФС з перехідною функцією 1 на рис. 1 буде мати вигляд кривої 1 на рис. 2, графік ЛАЧХ для МФС з перехідною функцією 2 на рис. 1 буде мати вигляд кривої 2 на рис. 2, а графік ЛАЧХ для МФС з перехідною функцією 3 на рис. 1 буде мати вигляд кривої 3 на рис. 2. Що ж до графіків ЛФЧХ для кожного із цих випадків, то вони будуть мати вигляд або кривої 4, зображеної на рис. 2а, або кривої 4, зображеної на рис. 2б.

На третьому етапі алгоритму МСЕММІ необхідно криву ЛАЧХ МФС «накрити» однією із ЛАЧХ НМФС, зображених на рис. 3, асимптотично апроксимувавши її або двома відрізками прямих, один з яких має нахил нуль децибел на декаду, а другий має нахил мінус двадцять децибел на декаду, як показано на рис. 3а, або двома відрізками прямих, один із яких має нахил нуль децибел на декаду, а другий має нахил мінус 40 децибел на декаду, як показано на рис. 3б, або чотирма відрізками прямих, перший з яких має нахил нуль децибел на декаду, другий має нахил плюс 20 децибел на декаду, третій має нахил нуль децибел на декаду, а четвертий має нахил мінус 20 децибел на декаду, як показано на рис. 3с. В результаті цього нам стають відомими частоти $\omega_0, \omega_s (\omega_{s1}, \omega_{s2}), \omega_z$, множину яких ми доповнюємо, ще й частотою ω_c , яку ми визначаємо з графіка ЛФЧХ МФС згідно з виразом (33).

На четвертому етапі алгоритму МСЕММІ необхідно, скориставшись виразами (43), (38) або (44), (40) або (45), (42), скласти системи рівнянь для визначення параметрів еквівалентних передаточних функцій з множини (26)—(28). При цьому в разі, якщо ЛАЧХ і ЛФЧХ МФС мають вигляд, зображений кривими 1, 4 на рис. 2, то еквівалентувати передаточну функцію цієї МФС в класі НМФС потрібно виразом (26), невідомими параметрами в якому є b_0^*, a_1^*, τ , визначити які можна із системи трьох рівнянь, що випливають із зіставлення відповідних графіків на рис. 2 і рис. 3 і мають вигляд

$$\begin{cases} L(\omega_0) = L_1^*(\omega_0); \\ L(\omega_z) = L_1^*(\omega_z); \\ \phi(\omega_z) = \phi_1^*(\omega_z). \end{cases} \quad (46)$$

За допомогою виразів (43), (38), система рівнянь (46) легко трансформується у систему рівнянь

$$\begin{cases} L(\omega_0) = 20 \lg b_0^* - 10 \lg(1 + (a_1^* \omega_0)^2); \\ 0 = 20 \lg b_0^* - 10 \lg(1 + (a_1^* \omega_z)^2); \\ \phi(\omega_z) = -\arctg(a_1^* \omega_z) - \omega_z \tau. \end{cases} \quad (47)$$

В разі, якщо ЛАЧХ і ЛФЧХ МФС мають вигляд кривих 2, 4 на рис. 2, то еквівалентувати передаточну функцію цієї МФС в класі НМФС потрібно виразом (27), невідомими параметрами в якому є $b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau$, визначити які можна з системи трьох рівнянь та однієї нерівності, що випливають із зіставлення відповідних графіків на рис. 2 і рис. 3 і мають вигляд

$$\begin{cases} L(\omega_0) = L_2^*(\omega_0); \\ L(\omega_z) = L_2^*(\omega_z); \\ \phi(\omega_z) = \phi_2^*(\omega_z); \\ L(\omega_s) < L_2^*(\omega_s). \end{cases} \quad (48)$$

За допомогою виразів (44), (40), система (48) легко трансформується у систему

$$\begin{cases} L(\omega_0) = 20 \lg b_0^* - 10 \lg((1 - a_2^* \omega_0^2)^2 + (a_1^* \omega_0)^2); \\ 0 = 20 \lg b_0^* - 10 \lg((1 - a_2^* \omega_z^2)^2 + (a_1^* \omega_z)^2); \\ \phi(\omega_z) = -\arctg \frac{a_1^* \omega_z}{1 - a_2^* \omega_z^2} - \omega_z \tau; \\ L(\omega_s) < 20 \lg b_0^* - 10 \lg((1 - a_2^* \omega_s^2)^2 + (a_1^* \omega_s)^2). \end{cases} \quad (49)$$

А в разі, якщо ЛАЧХ і ЛФЧХ МФС мають вигляд, зображений кривими 3, 4 на рис. 2, то екви-

валентувати передаточну функцію цієї МФС в класі НМФС потрібно виразом (28), невідомими параметрами в якому є $b_1^*, b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau$, визначити які можна із системи чотирьох рівнянь та однієї нерівності, що випливають із зіставлення відповідних графіків на рис. 2 і рис. 3 і мають вигляд:

$$\begin{cases} L(\omega_0) = L_3^*(\omega_0); \\ L(\omega_z) = L_3^*(\omega_z); \\ L(\omega_{s1}) = L_3^*(\omega_{s1}); \\ \phi(\omega_z) = \phi_3^*(\omega_z); \\ L(\omega_{s2}) < L_3^*(\omega_{s2}). \end{cases} \quad (50)$$

За допомогою виразів (45), (42), система (50) легко трансформується у систему

$$\begin{cases} L(\omega_0) = 10 \left(\lg \left((b_0^*)^2 + (b_1^* \omega_0)^2 \right) - \lg \left((1 - a_2^* \omega_0^2)^2 + (a_1^* \omega_0)^2 \right) \right); \\ 0 = \lg \left((b_0^*)^2 + (b_1^* \omega_z)^2 \right) - \lg \left((1 - a_2^* \omega_z^2)^2 + (a_1^* \omega_z)^2 \right); \\ L(\omega_{s1}) = 10 \left(\lg \left((b_0^*)^2 + (b_1^* \omega_{s1})^2 \right) - \lg \left((1 - a_2^* \omega_{s1}^2)^2 + (a_1^* \omega_{s1})^2 \right) \right); \\ \phi(\omega_z) = -\arctg \frac{b_0^* a_1^* \omega_z - b_1^* \omega_z (1 - a_2^* \omega_z^2)}{b_1^* a_1^* \omega_z^2 + b_0^* (1 - a_2^* \omega_z^2)} - \omega_z \tau; \\ L(\omega_{s2}) < 10 \left(\lg \left((b_0^*)^2 + (b_1^* \omega_{s2})^2 \right) - \lg \left((1 - a_2^* \omega_{s2}^2)^2 + (a_1^* \omega_{s2})^2 \right) \right). \end{cases} \quad (51)$$

На п'ятому етапі алгоритму МСЕММІ необхідно, скориставшись системою рівнянь (47) або системою рівнянь-нерівностей (49) чи (51), визначити відповідно чисельні значення параметрів b_0^*, a_1^*, τ або параметрів $b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau$ чи параметрів $b_1^*, b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau$ еквівалентних передаточних функцій (26) або (27) чи (28).

Звертаємо увагу на те, що нерівності в системі (49), (51) нами введені для забезпечення їх сумісності, але розв'язувати ці системи, звичайно ж, потрібно, як системи рівнянь, послідовно задаючи чисельні значення лівої частини нерівності в межах її виконання і перетворюючи цю нерівність в рівняння та з кожним кроком наближаючись до гранично можливих значень параметрів еквівалентної передаточної функції вибраного виду.

Висновки

1. Запропоновано метод синтезу еквівалентних математичних моделей мінімально-фазових динамічних систем високого порядку, до яких відносяться і вимірювальні системи зі складною структурою, в класі немінімально-фазових не вище другого порядку.
2. Розроблено метод ідентифікації синтезованих еквівалентних математичних моделей з алгоритмом, зануреним в частотну область.
3. Показано, як застосовувати запропоновані методи для синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей вимірювальних систем, що не мають зворотних зв'язків у своїй структурі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу [Електронний ресурс] / [Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова] // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. Англ., рос. та укр. мовами. — 2014. — № 3. — С. 1—10. — Режим доступу : <http://praci.vntu.edu.ua/article/view/3751>.
2. Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта / [Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова] // Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2014. — № 5. — С. 7—15.
3. Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order/ [Borys I. Mokin, Alex. B. Mokin, Vitaliy B. Mokin, Irina A. Chernova] //

Journal of Automation and Information Sciences. — 2016. — Issue 3. Vol. 48. — Pp. 83—97.

4. Мокин Б. И. Построение математической модели минимального порядка для линейной динамической системы с обратной связью / Б. И. Мокин, И. А. Чернова // Проблемы управления и информации : Международный научно-технич. журнал. — 2017. — № 2. — С. 59—66.

5. Еквівалентування замкненої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі / [Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, С. О. Довгополюк] // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2017. — № 3. — С. 68—76.

6. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий ; пер. с польского. — М. : Машиностроение. — 1974. — 328 с.

7. Энциклопедия кибернетики (В двух томах). Том первый / [В. М. Глушков, М. Амосов, И. А. Артеменко и др.]. — К. : Главная редакция УСЭ, 1975. — 607 с.

8. Куропаткин П. В. Теория автоматического управления : учеб. пос. / П. В. Куропаткин. — М. : Высшая школа, 1973. — 528 с.

9. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навч. посіб. / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. — Вінниця : ВНТУ, 2010. — 260 с.

Рекомендована кафедрою системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 1.12.2017

Мокін Борис Іванович — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Мокін Віталій Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Чернова Ірина Олександрівна — аспірантка кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Довгополюк Сергій Олександрович — аспірант кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: isergeyq@gmail.com

B. I. Mokin¹
O. B. Mokin¹
V. B. Mokin¹
I. O. Chernova¹
S. O. Dvhopoliuk¹

Equivalententing of Mathematical Models of Minimum-Phase Systems of High Order in the Class of Nonminimum-Phase

¹Vinnitsia National Technical University

The method of synthesis of equivalent mathematical models of high-order minimal-phase dynamical systems, which includes measuring systems with complex structure, has been proposed in the class of nonminimum-phase not higher than the second order with the identification algorithm submerged in the frequency domain.

Keywords: closed linear dynamical systems, mathematical model of open-loop, equivalententing, critical frequency.

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, Professor of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Mokin Vitalii B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Chernova Iryna O. — Post-Graduate Student of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Dvhopoliuk Serhii O. — Post-Graduate Student of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: isergeyq@gmail.com

Б. И. Мокин¹
А. Б. Мокин¹
В. Б. Мокин¹
И. А. Чернова¹
С. А. Довгополюк¹

Эквивалентирование математических моделей минимально-фазовых систем высокого порядка в классе неминимально-фазовых

¹Винницкий национальный технический университет

Предложен метод синтеза эквивалентных математических моделей минимально фазовых динамических систем высокого порядка, к которым относятся и измерительные системы со сложной структурой, в классе неминимально-фазовых не выше второго порядка с алгоритмом идентификации, погруженным в частотную область.

Ключевые слова: замкнутые линейные динамические системы, разомкнутая математическая модель, эквивалентирование, критическая частота.

Мокин Борис Иванович — академик НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, профессор кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: bogys.mokin@gmail.com ;

Мокин Александр Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Мокин Виталий Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: vbmokin@gmail.com ;

Чернова Ирина Александровна — аспирант кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Довгополюк Сергей Александрович — аспирант кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: isergeyq@gmail.com