

## ВИКОРИСТАННЯ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄМНОГО КООРДИНАТНОГО КОМУТАТОРА

<sup>1</sup>Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем  
НАН та МОН України

З використанням комбінаторного аналізу побудовано математичну модель об'ємного координатного комутатора, у якого за рахунок багат шарового виконання зменшено кількість елементів комутації на його поверхні. Грунтуючись на деяких властивостях перестановок визначено коефіцієнти зменшення цього комутатора, з урахуванням яких оптимізований варіант його конструкції залишається неблокувальним.

**Ключові слова:** об'ємний координатний комутатор, елемент комутації, матриця, перестановка, комбінаторна оптимізація.

### Вступ

Для оптимізації та налагодження комутаційних систем, що мають місце в телекомунікації та обчислювальній техніці, використовується теорія комбінаторного аналізу та комбінаторної оптимізації [1, 2]. Одним з блоків у цих системах є комутатор, зокрема координатний, який є матрицею ортогональних електричних шин зі з'єднувальним елементом в точках їхнього перетину та входами і виходами. Комутаційні системи можуть бути повнодоступними та неповнодоступними [3, 4]. У повнодоступній системі встановлюється зв'язок з будь-яким входом та виходом незалежно від уже існуючих з'єднань. Якщо в комутаторі наступний зв'язок може бути заблоковано раніше встановленими зв'язками — це неповнодоступна комутаційна система. Конфліктною називається ситуація, коли два входи потрібно з'єднати з одним виходом. За режимами комутаційні системи поділяються на одиничні, пакетні і разові. В одиничній комутаційній системі комутації з'єднання виникають або закінчуються по одному, в пакетній — групами, в разовій — всі одночасно.

Перевага координатного комутатора в тому, що він повнодоступний за будь-якого режиму. Але у разовій комутації кількість задіяних на його поверхні елементів комутації із  $n^2$  дорівнює  $n$ . Тому він займає значну площу, яка не використовується.

Нижче, в рамках теорії комбінаторної оптимізації побудовано математичну модель та описано нову конструкцію координатного комутатора, в якого зменшено кількість елементів комутації на його поверхні за рахунок багат шарового виконання. З використанням деяких властивостей перестановок визначено коефіцієнти зменшення координатного комутатора, з урахуванням яких оптимізований варіант його конструкції залишається неблокувальним.

Наведемо загальну математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації.

### Математична постановка загальної задачі комбінаторної оптимізації

Задачі комбінаторної оптимізації, зазвичай задаються на одній або кількох множинах, наприклад  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  та  $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$ , елементи яких мають будь-яку природу [5]. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В задачах *першого* типу кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число  $c_{lt} \in R$ , яке називають вагою ребра ( $R$  — множина дійсних чисел);  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ ,  $n$  — кількість елементів множини  $A$ ,  $\tilde{n}$  — кількість елементів множини  $B$ . Припустимо, що  $n = \tilde{n}$ . Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини  $c_{lt}$  назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В задачах *другого* типу між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа  $v_j \in R$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , яким відповідають деякі

властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач з елементів однієї або кількох базових множин, наприклад  $a_l \in A$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$ , утворюється комбінаторна множина  $W$  — сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах  $w$  комбінаторної множини  $W$  вводиться цільова функція  $F(w)$ . Необхідно знайти елемент  $w^*$  множини  $W$ , для якого  $F(w)$  набуває оптимального значення за умови виконання заданих обмежень.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  [5]. Позначимо її упорядкованою множиною  $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$ , де  $\eta \in \{1, \dots, n\}$  — кількість елементів у  $w^k$  (в подальшому  $\eta$  позначатимемо і як  $\eta^k$ ),  $W = \{w^k\}_1^q$  — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс  $k$  ( $k \in \{1, \dots, q\}$ ) у  $w^k$  позначає порядковий номер  $w^k$  у  $W$ ,  $q$  — кількість  $w^k$  у  $W$ .

Для моделювання координатного комутатора використаємо таку комбінаторну конфігурацію як перестановка, яку досліджено досить ґрунтовно, наприклад в [2, 6]. Операцію транспозиції позначимо  $\alpha(w_i, w_j)$ . Від будь-якої перестановки з  $n$  елементів можна перейти до будь-якої іншої з тих самих символів за допомогою як однієї, так і кількох транспозицій. Перестановки  $w = (w_1, \dots, w_n)$  утворюються або транспозицією  $\alpha(w_i, w_j)$  або вибиранням  $\tilde{\alpha}(A^0)$ ,  $A^0 \subset A$  із  $n$  елементів базової множини  $A$  по  $n$ .

Розглянемо таку комбінаторну конфігурацію як вибірки. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину [2]. Під вибіркою розуміємо вибрану підмножину (комбінаторну конфігурацію). Дві нетотожні вибірки  $w^k$  та  $w^i$  назвемо ізоморфними, якщо  $\eta^k = \eta^i$ . Підмножину  $W_\eta \subset W$  назвемо підмножиною ізоморфних вибірок, якщо її елементи — ізоморфні вибірки. Множина будь-якого типу вибірок складається з підмножин ізоморфних вибірок.

### Математична модель об'ємного координатного комутатора як задача комбінаторної оптимізації

Комутатор, який має  $n$  входів і  $n$  виходів та працює в разовому режимі, подамо матрицею  $C = \|c_{lt}\|_{n \times n}$ ,  $c_{lt}$  якої відображають елементи комутації, розміщені у вузлах перетину горизонтальних та вертикальних каналів зв'язку [7—9]. Рядком матриці вважатимемо горизонтальний ряд елементів комутації і горизонтальний канал зв'язку, пов'язаний з виходом. Стовпцем матриці вважатимемо вертикальний канал зв'язку, з'єднаний із входом, та вертикальний ряд елементів комутації. Вертикальний канал зв'язку назвемо шинами стовпця, а горизонтальний — шинами рядка матриці  $C$ . Елементи комутації за допомогою шин рядків та стовпців з'єднують певні входи та виходи.

Номера вхідних сигналів, розміщених у деякому визначеному порядку, подамо перестановкою  $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k) \in W$ , а номера вихідних сигналів — перестановкою  $w'^i = (w_1'^i, \dots, w_n'^i) \in W'$ , де  $W$  — множина всіляких перестановок номерів вхідних сигналів,  $W'$  — множина всіляких перестановок номерів вихідних сигналів,  $k, i \in \{1, \dots, n!\}$ . Для  $k$ -ї перестановки  $w^k$  вхідних сигналів поставимо у відповідність  $i$ -ту перестановку  $w'^i$  вихідних сигналів. Пару  $(w^k, w'^i)$  назвемо комбінацією вхідних та вихідних сигналів (комбінацією сигналів) комутатора, що працює в разовому режимі. Позначимо її  $d_s(w^k, w'^i)$ . Множину всіляких комбінацій сигналів позначимо  $G(W, W')$ , а їхню кількість у цій множині — як  $|G(W, W')|$ . Оскільки при разовій комутації  $k$ -ї перестановці  $w^k \in W$  відповідає  $n!$  перестановок  $w'^i \in W'$ , то кількість комбінацій сигналів строго неблокувального комутатора дорівнює  $(n!)^2$ , тобто  $|G(W, W')| = (n!)^2$ . Якщо комутатор неблокуючий в ши-

рокому значенні слова, то кількість  $d_s(w^k, w^i)$  для нього позначимо  $|G(W, W')| \cong (n!)^2$ . Для цього комутатора існує  $(n!)^2$  комбінацій сигналів, але необхідно комутацію проводити за строгими правилами. Частково доступним вважаємо комутатор, у якого кількість комбінацій сигналів менша, ніж  $(n!)^2$ , тобто  $|G(W, W')| < (n!)^2$ . Якщо у комутатора не існує жодної комбінації сигналів, комутатор недоступний, а  $|G(W, W')| = 0$ .

Оскільки під час разової комутації сигналів задіяно  $n$  елементів комутації із  $n^2$ , оптимізуємо конструкцію координатного комутатора з метою мінімізації кількості елементів комутації, розміщених на його поверхні. Розв'язок поставленої задачі досягається за рахунок зменшення кількості рядків та стовпців матриці та перенесення шин комутації на паралельні поверхні. В результаті одержано багат шарову конструкцію координатного комутатора, який названо об'ємним [7—9]. Кожен його шар складається з діелектрика з розміщеними на ньому ортогональними шинами, в точках перетину яких знаходиться спільний для всіх шарів з'єднувальний елемент. На рисунку показано схему об'ємного координатного комутатора.

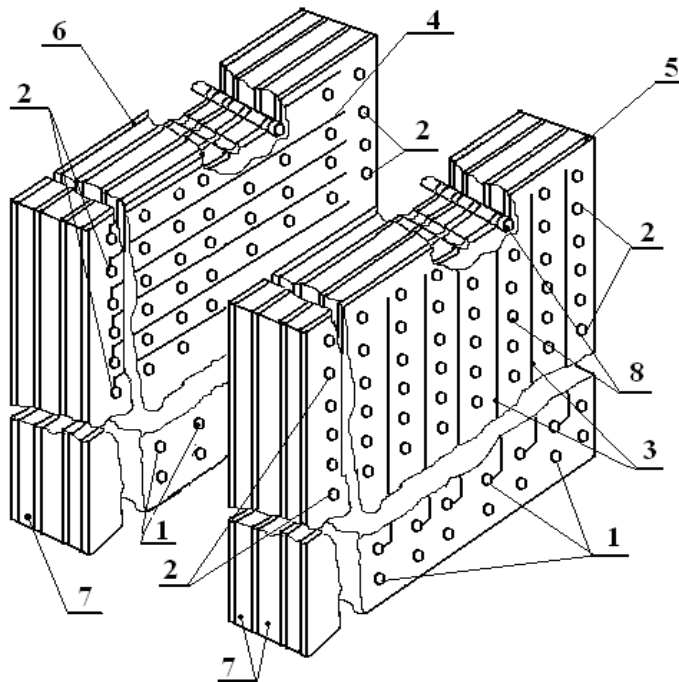


Схема об'ємного координатного комутатора:

1 — вхід; 2 — вихід; 3 — вхідна шина; 4 — вихідна шина; 5, 6 — шари із вхідними та вихідними шинами;  
7 — діелектрик; 8 — оптичне волокно з контактами

Об'ємний координатний комутатор задамо матрицею  $Q(\mu^i) = \bigcup_{p=1}^{Z(\mu^i)} C^p(\mu^i)$ , де  $C^p(\mu^i)$  — її  $p$ -й шар,  $Z(\mu^i)$  — кількість шарів. Уведемо такі параметри:  $\lambda$  — коефіцієнт зменшення рядків, дорівнює кількості шин, розміщених в одному рядку матриці  $Q(\mu^i)$ ,  $\zeta$  — коефіцієнт зменшення стовпців і дорівнює кількості шин, розміщених в одному стовпці  $Q(\mu^i)$ ,  $\lambda, \zeta, n \in \{2, 4, \dots, 2j\}$ ,  $\lambda \leq \lfloor n/\lambda \rfloor$ ,  $\zeta \leq \lfloor n/\zeta \rfloor$ ,  $j \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ ,  $\mu^i$  — сполучення без повторень, утворене з елементів множини  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ , де кожному  $a_s$  відповідає певний параметр  $i$ -го комутатора, за якими оптимізується координатний комутатор (кількість шарів, кількість шин на поверхні, тип блокування комутатора тощо);  $m$  — кількість таких параметрів,  $i \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$ ,  $\tilde{q}$  — кількість можливих варіантів об'ємного координатного комутатора.

Задача вибору оптимальної конструкції об'ємного координатного комутатора полягає в знаходженні такого  $\mu^i$ , для якого зі зменшенням елементів комутації, розміщених на його поверхні,

змодельована цільова функція  $F(\mu^i)$  набуває оптимального значення за умови, що для нього кількість комбінацій сигналів дорівнює  $|G(W, W')| = (n!)^2$ . При цьому площа комутатора зменшується, а кількість шарів збільшується. Оптимальні коефіцієнти його зменшення визначено з використанням властивостей комбінаторних матриць та перестановок. З урахуванням цього отриманий варіант конструкції цього комутатора залишається неблокуючим.

### Аналіз координатного комутатора

Для оптимізації конструкції координатного комутатора виділимо три типи матриці, якою він задається [9]. В першому типі вважатимемо, що входи з'єднуються з горизонтальними шинами, а виходи — з вертикальними. В другому — входи та виходи з'єднуються з вертикальними шинами, горизонтальні шини грають роль допоміжних. Координатний комутатор третього типу — дві однакові матриці, які розміщено поруч одна з однією таким чином, що горизонтальні шини є для них спільними та виконують роль допоміжних зв'язків. Вертикальні шини першої матриці зв'язані зі входами, а вертикальні шини другої матриці зв'язані з виходами. Аналіз оговорених варіантів комутаторів показує, що оптимальну конструкцію має перший тип координатного комутатора.

Сформулюємо такі теореми для першого типу. Доведення цих теорем наведено в [7].

**Теорема 1.** В об'ємного координатного комутатора розміром  $\frac{n}{\lambda} \times n$ , який утворено зменшенням або рядків або стовпців,  $|G(W, W')| = (n!)^2$ , а кількість шарів, на яких він розміщений, дорівнює  $\lambda + 1$ .

**Теорема 2.** Якщо координатний комутатор порядку  $n$  зменшити по рядках в  $\lambda$  раз, а по стовпцях в два рази, то для отриманого варіанта  $|G(W, W')| = (n!)^2$ , а кількість шарів, на яких розміщено комутатор розмірністю  $n/\lambda \times n/2$ , дорівнює  $\lambda + 2$ .

Якщо елемент комутації в координатному комутаторі розміром  $n/\lambda \times n/\zeta$  з'єднує одночасно  $\lambda$  зв'язків, причому  $\lambda \leq \zeta$ , то для нього  $|G(\Omega, \Omega')| \cong (n!)^2$ .

Схема налагодження строго неблокувального об'ємного координатного комутатора досить проста, тому що будь-які задіяні елементи комутації не блокують наступні. Схема налагодження неблокувального комутатора в широкому значенні слова проводиться за строгими правилами, оскільки задіяні елементи комутації можуть заблокувати наступні в певній комбінації сигналів. Задача налагодження частково блокувального комутатора полягає у знаходженні в  $G(W, W')$  такої комбінації сигналів  $d_s(w^k, w^i)$ , за якої комутатор є неблокувальним.

### Комутація внутрішніх шарів

Однією з проблем реалізації об'ємного координатного комутатора є з'єднання шин елементами комутації у внутрішніх шарах. З цією метою розроблено елементи комутації з оптичними перемикачами, які нескладно реалізувати існуючими технологіями. Для перемикачання входів та виходів елемент комутації повинен мати зв'язок з оптичними волокнами кількістю  $\frac{n!}{(n-2)! 2!}$ , які перемикаються в процесі роботи комутатора.

Робота запропонованого об'ємного координатного комутатора з оптичним перемикачем проводиться таким чином. Нехай необхідно з'єднати вхід, зв'язаний із вхідною шиною, розміщеною на  $p$ -му шарі, з виходом, зв'язаним з вихідною шиною, розміщеною на шарі  $\tilde{p}$ , з'єднаними між собою двома електрооптичними контактами оптичного волокна, та розміщеними на рівні шарів  $p$  та  $\tilde{p}$ . Подачею сигналу активізації на вибрані вхід та оптичне волокно, що з'єднує вхід та вихід, перемикаються вхідна шина шару  $p$  та вихідна шина шару  $\tilde{p}$ . Тим самим електричний сигнал, що надходить на вхід, завдяки електрооптичним контактам та оптичному волокну, з'являється на виході. Аналогічним способом комутуються будь-які задані вхід та вихід. Оскільки один елемент комутації, який містить  $\tilde{k}$  оптичних волокон, з'єднує  $\tilde{k}$  вхідних та  $\tilde{l}$  вихідних шин, то при комутації  $\tilde{k}$  входів та  $\tilde{l}$  виходів в рядку матриці  $Q(\mu^i)$  задіяно  $\tilde{k}$  з'єднувальних елементів, а в стовпці — відповідно  $\tilde{l}$ .

**Приклад.** Маємо координатний комутатор, в якого  $n=8$ ,  $\tilde{n}=8$ ,  $d_1=2,5$  мм,  $d_2=2,5$  мм. Площа, яку займає комутаційне поле дорівнює  $d_1(n-1)d_2(\tilde{n}-1)=306,25$  мм<sup>2</sup>. Кількість з'єднувальних елементів дорівнює 64,  $d_1$ ,  $d_2$  — відстані між елементами комутації по горизонталі та вертикалі відповідно,  $n$ ,  $\tilde{n}$  — кількість елементів комутації, які містяться в рядках та відповідно стовпцях комутатора.

Зменшимо площу комутаційного поля по рядках. Нехай  $\lambda=2$ ,  $\zeta=1$ ,  $d_1=2,5$  мм,  $d_2=2,5$  мм,  $\tilde{l}=1$ ,  $r=1$ ,  $\tilde{l}$ ,  $r$  — кількість горизонтальних та вертикальних шин, які містяться на одному шарі комутатора. Тоді кількість шарів зменшеного комутатора дорівнює  $\frac{\lambda}{\tilde{l}} + \frac{\zeta}{r} = 3$ , його площа дорівнює  $\frac{d_1(n-\tilde{k})d_2(\tilde{n}-\tilde{l})}{\lambda\zeta} = 131,25$  мм<sup>2</sup>, а кількість з'єднувальних елементів  $\frac{n\tilde{n}}{\lambda\zeta} = 32$ . Звідси видно, що площа комутатора зменшилася в 2,3 рази, а кількість з'єднувальних елементів, розміщених на поверхні — в два рази.

Об'ємний координатний комутатор розмірністю  $\frac{8}{2} \times 8 \times 3$ , виконаний на трьох шарах. Доступ до шарів виконується завдяки перехідному отвору (з'єднувальному), де знаходяться оптичні волокна з контактами. На кожному із двох зовнішніх шарів розміщено чотири рядки, кожен з яких містить один ряд перехідних отворів та одну вихідну шину яка має зв'язок з електрооптичними контактами оптичного волокна, що знаходяться в отворі, та виходами. Внутрішній шар містить вісім стовпців, в кожному з яких знаходиться один ряд перехідних отворів з електрооптичними контактами та одна вхідна шина, зв'язана з електрооптичними контактами та входом.

Шляхом подачі сигналу активізації на вибрані вхід та оптичне волокно, що з'єднує вхід та вихід електрооптичними контактами перемикаються вхідна шина шару  $p$  та вихідна шина шару  $\tilde{p}$ . Тим самим електричний сигнал, що надходить на вхід, завдяки електрооптичним контактам та оптичному волокну, з'являється на виході. За одночасної комутації восьми входів та виходів в рядку задіяно два перехідних отвори, а в стовпці — один.

### Висновки

Математична модель координатного комутатора зводиться до оптимізаційної задачі комбінаторного типу. Аргументом цільової функції в ній є сполучення без повторень. Використання властивостей перестановок дозволило визначити коефіцієнти зменшення координатного комутатора. Позитивний ефект від об'ємного координатного комутатора полягає у тому, що завдяки його розміщенню на  $\lambda + \zeta$  шарах зменшується поверхня координатного комутатора більше, ніж в  $\lambda\zeta$  разів, за рахунок зменшення в  $\lambda\zeta$  разів кількості елементів комутації, розміщених на його поверхні. Зменшення кількості рядків і стовпців матриці за рахунок її багат шарового виконання дозволяє за того самого розміру координатного комутатора збільшити кількість входів та виходів або мінімізувати площу, яку він займає.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика : пер. с англ. / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. — М. : Мир, 1980. — 476 с.
2. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ / К. А. Рыбников. — М. : изд-во Москов. ун-та, 1985. — 308 с.
3. Лившиц Б. С. Теория телетрафики / Б. С. Лившиц, А. П. Пшеничников, А. Д. Харкевич. — М. : Связь, 1979. — 224 с.
4. Дудко А. А. Неблокирующие коммутационные схемы / А. А. Дудко. — М. : ВЦ АН СССР, 1990. — 68 с.
5. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра. техн. наук / Тимофієва Н. К. ; Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. — 2007. — 32 с.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика : пер. с англ. / Р. Стенли. — М. : Мир, 1990. — 440 с.
7. Тимофієва Н. К. Про оптимізацію конструкції координатного комутатора / Н. К. Тимофієва // Математичні машини і системи. — 2005. — № 1. — С. 84—92.
8. Пат. UA 109757 C2. Україна. Об'ємний координатний комутатор з оптичним перемикачем / Тимофієва Н. К. ; заявл. 05.12.2014; опубл. 25.09.2015, Бюл. № 18.
9. Некрасов Д. М. Координатный коммутатор / Д. М. Некрасов, Н. К. Тимофеева ; Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины. — К., 1993. — 23 с. — Деп. в ВИНТИ 07.06.93, N 1550—В93.

Рекомендована кафедрою лазерної та оптикоелектронної техніки ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 9.11.2016

**Тимофієва Надія Костянтинівна** — д-р техн. наук, ст. наук. співроб., провідний науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій, e-mail: Tymnad@gmail.com .

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Київ

**N. K. Tymofieva**<sup>1</sup>

## **The Use of Combinatorial Analysis for Modeling of Volumetric Crosspoint Switch**

<sup>1</sup>International Scientific and Training Center for Information Technologies and Systems of National Academy of Sciences of Ukraine and Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv

*With the use of combinatorial analysis there has been built the mathematical model of volume crosspoint switch in which the amount of switching elements on its surface is diminished due to multilayer realization. There have been defined coefficients of reduction of this crosspoint switch, due to which the optimal variant of this construction is nonblocking.*

**Keywords:** crosspoint switch, switching element, matrix, permutation, combinatorial optimization.

**Tymofieva Nadiia K.** — Dr. Sc. (Eng.), Senior Research Associate, Leading Research Associate of the Department of Complex Researches of Information Technologies, e-mail: Tymnad@gmail.com

**Н. К. Тимофеева**<sup>1</sup>

## **Использование комбинаторного анализа для моделирования объемного координатного коммутатора**

<sup>1</sup>Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН и МОН Украины, Киев

*С использованием комбинаторного анализа построена математическая модель объемного координатного коммутатора, в котором за счет многослойного выполнения уменьшено количество элементов коммутации на его поверхности. Используя некоторые свойства перестановок, определены коэффициенты уменьшения этого коммутатора, с учетом которых оптимизированный вариант его конструкции остается неблокирующим.*

**Ключевые слова:** объемный координатный коммутатор, элемент коммутации, матрица, перестановка, комбинаторная оптимизация.

**Тимофеева Надежда Константиновна** — д-р техн. наук, ст. научн. сотр., ведущий научный сотрудник отдела комплексных исследований информационных технологий, e-mail: Tymnad@gmail.com