

ПРОЕКТУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ З УРАХУВАННЯМ КРИВИНИ ТА СКРУТУ У ВУЗЛАХ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

¹Київська державна академія водного транспорту
ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Розглянуто побудову поліноміальної просторової кривої, заданою двома точками і заданими в них величинами кривини і скруту.

Ключові слова: просторова крива, кривина, скрут.

Вступ

Під час проектування шляхопроводів для сипучих і рідинних мас виникає задача проектування такого криволінійного шляху, який би враховував задану кривину і скрут в зазначених точках. В статті пропонується аналітичний метод побудови такої кривої.

Аналіз публікацій за тематикою дослідження показує, що в роботах [1—9] пропонуються інтегративні методи проектування обводів із заданою формою і кривиною, але в цих роботах не розглядається задача проектування кривої за заданими кривинами і скрутами в конкретних точках.

Метою роботи є розробка аналітичного апарату побудови кривої, яка задана точками і кривинами та скрутами в них.

Постановка задачі

В деяких випадках конструкторам доводиться розв'язувати задачу проектування просторової кривої із заданими законами кривини і скруту, наприклад під час проектування шляхопроводу для рідини, в якому необхідно задати шлях не тільки із заданим графіком зміни кривини, але й із заданим графіком скруту. Останній графік дає змогу задати закон обертання рухомих мас навколо вектору руху. Будемо розв'язувати таку задачу.

У просторі заданий точковий ряд $\Delta : x_i, y_i, z_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Крім того, в цих точках задані вектори руху x'_i, y'_i, z'_i , величини кривин уздовж руху K_{1i} і величини скруту навколо векторів руху K_{2i} .

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1)$$

Як відомо з [1], якщо крива задана у вигляді $r = r(t)$, то кривина K_1 задається формулою

$$K_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}. \quad (2)$$

Величина скруту розраховується за формулою

$$K_2 = \frac{r' r'' r'''}{(r' x r'')^2}, \quad (3)$$

де $r' r'' r'''$ — змішане векторне помноження

З формули (2) і (3) бачимо, для того, щоб задати значення кривини і скруту, необхідно задати перші, другі і треті похідні в заданих точках $\Delta : x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, x''_i, y''_i, z''_i, x'''_i, y'''_i, z'''_i$.

Розв'язок поставленої задачі

Для того, щоб розв'язати поставлену задачу, необхідно знайти такий сегмент кривої, який проходить через задані точки $i = 0, i = 1$ і має в цих точках задані перші, другі і треті похідні.

Будемо намагатися знайти такий поліноміальний сегмент

$$r(t) = \sum_{i=0}^k a_k t^k, \quad (4)$$

який буде відповідати поставленій задачі.

Поліноміальний сегмент у вигляді (4), який проходить через задані дві точки 0 і 1 і має в них задані перші, другі і треті похідні, буде сьомого степеня, тому що згідно з класичною задачею ермітової інтерполяції многочлен Ерміта має степінь $n(m + 1) - 1 = 7$, де $n = 2$ — кількість вузлів інтерполяції, $m = 3$ — максимальний порядок похідних.

Застосування кривої Безьє

Будемо розв'язувати поставлену задачу за допомогою кривої Безьє сьомого степеня [2]

$$r = r_0(1-t)^7 + 7r_1(1-t)^6 t + 21r_2(1-t)^5 t^2 + 35r_3(1-t)^4 t^3 + 35r_4(1-t)^3 t^4 + 21r_5(1-t)^2 t^5 + 7r_6(1-t)t^6 + r_7 t^7. \quad (5)$$

Запишемо (5) у вигляді

$$r = a_0 + a_1 t + \dots = \sum_{i=0}^k a_k t^k. \quad (6)$$

Будемо мати:

$$a_0 = r_0; \quad (7)$$

$$a_1 = 7(r_1 - r_0); \quad (8)$$

$$a_2 = 21r_0 + 42r_1 + 21r_2; \quad (9)$$

$$a_3 = -35r_0 + 105r_1 + 105r_2 + 35r_3; \quad (10)$$

$$a_4 = 35r_0 - 140r_1 + 210r_2 - 140r_3 + 35r_4; \quad (11)$$

$$a_5 = 21r_0 + 105r_1 - 210r_2 + 210r_3 - 105r_4 + 21r_5; \quad (12)$$

$$a_6 = 7r_0 - 42r_1 + 105r_2 - 140r_3 + 105r_4 - 42r_5 + 7r_6; \quad (13)$$

$$a_7 = -r_0 + 7r_1 - 21r_2 + 35r_3 - 35r_4 + 21r_5 - 7r_6 + r_7. \quad (14)$$

Якщо продиференціювати (6) і вважати $t = 0$ в точці 0, то будемо мати такі рівняння:

$$r_0 = a_0; \quad (15)$$

$$r' = a_1 = 7(r_1 - r_0); \quad (16)$$

$$r'' = 2a_2 = 2(21r_0 - 42r_1 + 21r_2); \quad (17)$$

$$r''' = 6a_3 = 6(-35r_0 + 105r_1 - 105r_2 + 35r_3). \quad (18)$$

Якщо задана точка r_0 , то з рівняння (16) розрахуємо точку r_1

$$r_1 = r_0 + \frac{r'_0}{7}. \quad (19)$$

З рівняння (17) розрахуємо точку r_2

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r''_0}{21}. \quad (20)$$

З рівняння (18) розрахуємо точку r_3

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r_0''}{21}. \quad (21)$$

Таким чином будуть визначені перші чотири точки r_0, r_1, r_2, r_3 кривої Безьє (5).
Якщо задати точку r_7 і вважати $t = 1$ в точці 7, то будемо мати такі рівняння:

$$r_6 = r_7 + \frac{r_7'}{7}; \quad (22)$$

$$r_5 = 2r_6 + r_7 - \frac{r_7''}{21}; \quad (23)$$

$$r_4 = 6r_5 + 6r_6 - r_7 + \frac{r_7'''}{6}. \quad (24)$$

Таким чином з використанням рівнянь (19)—(24) розраховують всі вісім точок від $i = 0$ до $i = 7$ кривої Безьє сьомого степеня (5).

Поставлена задача розв'язана.

Висновки

Визначена крива Безьє сьомого степеня, яка проходить через дві задані точки із заданими в ній кривинами і скрутами. Такий підхід дає змогу моделювати криву за заданим каркасом точок із заданими кривинами та скрутами, що важливо в проектуванні шляхопроводу для рідини, у якому необхідно задати шлях не тільки з заданим графіком зміни кривини, але й з заданим графіком скруту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Погорелов А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. — М. : Наука, Физматгиз, 1983. — 288 с.
2. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / Фокс А., Пратт М. : пер. с англ. — М. : Мир, 1982. — 304 с.
3. Бадаєв Ю. І. Керування кривиною NURBS-кривої 3-го порядку за допомогою ваги контрольних вектор-точок / Ю. І. Бадаєв, А. О. Блиндарук [Електронний ресурс] // Водний транспорт : зб. наук. праць Київської державної академії водного транспорту. — 2014. — № 3 (21). — С. 103—105. — Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vodt_2014_3_21.
4. Бадаєв Ю. І. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS-кривої // Ю. І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Современные информационные и электронные технологии : XV Международная научно-практическая конференция : науч. труды. Одеса, 2014. — Т. 1. — С. 26 — 27.
5. Бадаєв Ю. І. Комп'ютерна реалізація проектування криволінійних обводів проектування криволінійних обводів методом NURBS-технологій вищих порядків // Ю. І. Бадаєв, А. О. Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання : зб. наук. праць / МДПУ. — Мелітополь, 2014. — С. 3 — 6.
6. Бадаєв Ю. І. Полярні векторно-параметричні полі тканинні перетворення кривих / Ю. І. Бадаєв, Л. П. Лагодіна, Л. Ю. Клімова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2010. — Вип. 83. — С.131 — 136.
7. Черняк В. І. Модифікація методу ідентифікації та згладжуючої апроксимації осцилюючих точок просторових дискретно-представлених кривих / В. І. Черняк // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2010. — Вип. 83. — С 182 — 187.
8. Аушева Н. В. Визначення параметричних кривих на основі кватерніанів з колінеарною векторною частиною / Н. В. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — Мелітополь : ТДАТУ, 2009. — Т. 43, вип. 4. — С. 67 — 72.
9. Бадаєв Ю. І. Сплайни п'ятого степеня із сегментів поліному за чотирма точками і двома похідними в них / Ю. І. Бадаєв, О. М. Ковтун // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2009. — Вип. 81. — С.78 — 82.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 27.05.2015

Бадаєв Юрій Іванович — д-р. техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій;
Ганношина Ірина Миколаївна — старший викладач кафедри інформаційних технологій, e-mail: igrams@meta.ua

Київська державна академія водного транспорту ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ

Yu. I. Badaiev¹
I. M. Gannoshyna¹

Design of a Spatial Curve, Taking into Account Curvature and Difficulties in Nodes of Interpolation Method

¹Kyiv State Maritime Academy Named After Hetman Petro Konashevich-Sahaydachniy

The article discusses the construction of a polynomial space curve defined by two points and set them in the values of curvature and torsion.

Keywords: space curve, curvature, scrut.

Badaiev Yuriy I. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Information Technologies;

Gannoshyna Iryna M. — Senior Lecturer of the Chair of Information Technologies, e-mail: iramsu@meta.ua

Ю. И. Бадаев¹
И. Н. Ганношина¹

Проектирование пространственной кривой с заданными законами кривизны и кручения в узлах интерполяции

¹Киевская государственная академия водного транспорта

им. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Рассмотрено построение полиномиальной пространственной кривой, заданной двумя точками и заданными в них величинами кривизны и кручения.

Ключевые слова: пространственная кривая, кривизна, кручение.

Бадаев Юрий Иванович — д-р. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий;

Ганношина Ирина Николаевна — старший преподаватель кафедры информационных технологий, e-mail: iramsu@meta.ua