

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 681.5.017+681.516.75

М. С. Юхимчук¹
А. І. Деркач¹

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ АНАЛІЗУ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРИЧНИХ ЗБУРЕНЬ НА СТІЙКІСТЬ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ З ЛОГІЧНИМИ УПРАВЛЯЮЧИМИ ПРИСТРОЯМИ

¹Вінницький національний технічний університет

Для дослідження, проектування та ефективного використання систем з логічними законами управління, що розглядаються в статті, запропоновані математичні моделі, які дозволяють визначити залежність режимів роботи від структури системи, параметрів релейних елементів, параметричних збурень, які суттєво можуть змінювати параметри автоколивань та впливати на стійкість систем.

Ключові слова: математична модель, збурення, лінеаризація, нелінійна система, управління.

Вступ

В наш час розвитку промисловості важливою задачею є розробка високотехнологічних автоматичних систем управління технологічними процесами, які забезпечують високонадійне управління складними неперервними, нелінійними, нестационарними об'єктами. Однак, існуючі методи моделювання автоматичних систем з логічними управляючими пристроями не враховують зміни параметрів релейних давачів, що формують вхідні сигнали логічних управляючих пристроїв у разі впливу на них неконтрольованих параметричних збурень. Такі зміни можуть привести до того, що самі автоколивання стають нестійкими.

Тому потребує розв'язання задача моделювання та дослідження параметрів автоколивань в автоматичних системах, що керуються логічними управляючими пристроями, яка на відміну від існуючих враховує неконтрольовані зміни параметрів сигналів релейних датчиків.

Метою роботи є підвищення ефективності роботи автоматичних систем з логічними управляючими пристроями за впливу параметричних збурень на стійкість систем.

Розробка математичних моделей автоколивань за впливу неконтрольованих параметричних збурень в системі

В теорії автоматичного управління для визначення параметрів автоколивань зазвичай використовують або аналітичний або графоаналітичний методи [1]. Аналітичний метод включає розв'язання таких задач:

— отримати рівняння лінійної частини нелінійної досліджуваної системи у вигляді $Q(p)x_1 = -R(p)x_2$, де x_1, x_2 — відповідно, вихідний та вхідний сигнали лінійної частини системи, причому лінійна частина може мати структуру будь-якої складності (та будь-який порядок рівняння);

— отримання рівняння нелінійної ланки $x_2 = F(x_1, px_1)$, яке після гармонічної лінеаризації записують у вигляді $x_2 = \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1$, де $q(a, \omega), q'(a, \omega)$ — коефіцієнти гармонічної лінеаризації, a, ω — амплітуда і частота вхідного сигналу $x_1 = a \sin \omega t$ нелінійної ланки;

— отримання гармонічного лінеаризованого характеристичного рівняння замкненої нелінійної

системи у вигляді $Q(p) + R(p) \left[q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] = 0$. Слід відмітити, що коли в замкненій системі виникають автоколивання з постійною амплітудою $a = a_p$ та постійною частотою $\omega = \omega_p$ коефіцієнти рівнянь стають сталими. Такі коливання визначаються, якщо підставити в характеристичне рівняння з сталими коефіцієнтами $p = j\omega_p$, що еквівалентно знаходженню границі стійкості;

— отримання лінеаризованого характеристичного рівняння системи у вигляді $Q(j\omega) + R(j\omega) \left[q(a, \omega) + jq'(a, \omega) \right] = 0$ за невідомих постійних значень амплітуди a та частоти ω , що входять в коефіцієнти гармонічної лінеаризації q та q' ;

— виділення в лінеаризованому характеристичному рівнянні системи дійсної та уявної частини у вигляді $X(\omega) + jY(\omega) = 0$;

— розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} X(\omega_p, a_p) = 0; \\ Y(\omega_p, a_p) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

відносно невідомих параметрів автоколивань a_p та ω_p ;

Зазвичай систему рівнянь (1) використовують також для дослідження залежностей параметрів автоколивань від параметрів системи для цього деякий параметр k вводять як параметр системи

рівнянь у вигляді $\begin{cases} X(\omega_p, a_p, k) = 0; \\ Y(\omega_p, a_p, k) = 0 \end{cases}$ та знаходять і досліджують такі залежності:

$$a_p = a_p(k), \quad \omega_p = \omega_p(k).$$

На основі результатів дослідження вибирають такі значення параметра системи k , щоб амплітуда автоколивань була достатньо малою, та частота їх не була небезпечною для системи, що досліджується, або таке значення параметра k , за якого автоколивання відсутні.

Як показано вище, цей метод зазвичай використовується для моделювання нелінійних систем. Введення в модель системи двох та більше параметрів, від яких залежить наявність автоколивань та їх параметри, суттєво ускладнює математичну модель системи та процедуру моделювання, що зазвичай зводять до наближених графоаналітичних процедур [2].

В статті будемо використовувати розглянутий вище метод для визначення параметрів автоколивань, що залежать від параметрів сигналів, які подаються на входи релейних елементів і параметрів релейних елементів A , ω , ϕ , U_x , U_y , b_x , b_y з урахуванням параметричних збурень в системі.

Для проведення досліджень узагальнену схему системи з логічним управляючим пристроєм (ЛУП) спростимо до системи з двохходовим ЛУП, двома давачами та двома релейними елементами (рис. 1). У цій системі на вхід (ЛУП) надходять сигнали відхилення регульованої величини (наприклад, температури) від номінального значення і випереджаючої дії від внутрішньої проміжної координати об'єкта (наприклад, збільшення тиску).

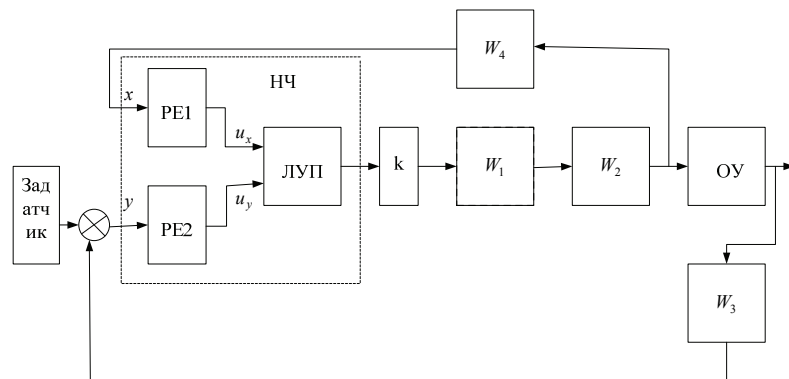


Рис. 1. Структурна схема автоматичної системи, яка керується двохходовим ЛУП

Для дослідження задаємо передатні функції датчиків, як моделі аперіодичної ланки першого порядку. Лінеаризоване рівняння логічного керувального пристрою з релейним елементами має вигляд:

$$U = \left[q_y(A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) y + \frac{q'_y(A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y)}{\omega} \dot{y} \right] + \left[q_x(A_x, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) x + \frac{q'_x(A_x, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y)}{\omega} \dot{x} \right]. \quad (2)$$

Вхідні сигнали мають зсув фаз $\phi < \frac{\pi}{2}$ тобто такий, що $\frac{b_x}{A_x} + \arcsin \frac{b_y}{A_y} < \phi < \frac{\pi b_x}{2A_x}$, та

$$0 < \phi \leq \arcsin \frac{b_x}{A_x} + \arcsin \frac{b_y}{A_y}. \quad (3)$$

тому, що коефіцієнти гармонічної лінеаризації рівняння ЛУП з двома вхідними сигналами залежать не тільки від амплітуд автоколивань A_x , A_y , сигналів x та y і частоти ω , але від зсуву фаз між вхідними сигналами. За певних значень зсуву фаз ϕ змінюється форма виразів коефіцієнтів гармонічної лінеаризації. Залежно від величини зсуву фаз ϕ і параметрів релейного перетворювача (зон нечутливості b_x , b_y і порогових значень u_x , u_y) можуть бути різні послідовності кутів перемикачів ψ_1, ψ_2 сигналу x та ψ_4, ψ_5 , сигналу y та вхідних сигналів логічного перетворювача u_x, u_y тобто різні комбінації вхідних сигналів, при цьому форма керувального впливу U змінюється (рис. 2). У співвідношеннях для визначення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації, в залежності від комбінації вхідних сигналів змінюється підінтегральна функція (керувальний вплив) і межі інтегрування (кути перемикачів), всередині яких логічна функція постійна.

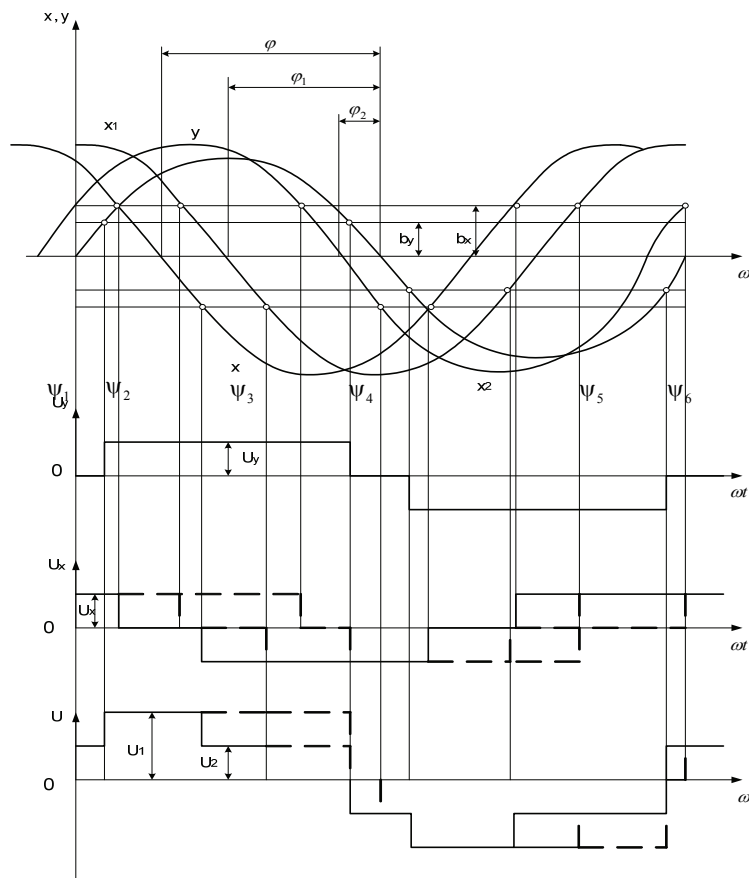


Рис. 2. Вплив зміни зсуву фаз ϕ між вхідними сигналами x та y на форму керувальних сигналів автомата U_x , U_y і керувального впливу U

Тому для певних діапазонів значень зсуву фаз між вхідними сигналами релейного перетворювача x і y коефіцієнти гармонічної лінеаризації матимуть різні вирази. Тобто у разі зміни параметрів об'єкту в широких діапазонах, коли зсув фаз між вхідними сигналами релейних елементів може значно змінюватися, необхідно враховувати можливість зміни виразів коефіцієнтів гармонічної лінеаризації, досліджуючи автоколивання або коливальні процеси в системах з ЛУП [3].

Визначимо коефіцієнти гармонічної лінеаризації q ($A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y$) для розглянутого діапазону зміни кута ϕ :

$$q_y(A_x, A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) = \frac{2}{\pi A_y} \left[(2U_1 - U_2) \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_y^2}} + U_2 \left(\cos \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A^2(\omega) A_y^2}} + \sin \phi \frac{b_x^2}{A^2(\omega) A_y^2} \right) \right]. \quad (4)$$

Коефіцієнт $q'(A_x, A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y)$ в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} q'_y(A_x, A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) &= \frac{2U_2}{\pi A_y} \left(\frac{b_y}{A_y} + \sin \phi \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_y^2}} - \cos \phi \frac{b_x^2}{A_x^2} \right) = \\ &= \frac{2U_2}{\pi A_y} \left(\frac{b_y}{A_y} \sin \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A^2(\omega) A_y^2}} + \sin \phi \frac{b_x}{A(\omega) A_y} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Зі зміною зсуву фаз в межах $\frac{b_x}{A_x} + \arcsin \frac{b_y}{A_y} < \phi \leq 90^\circ$ коефіцієнти гармонічної лінеаризації у відповідно до виразів (4), (5) набудуть вигляду

$$q_y(A_x, A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) = \frac{2}{\pi A_y} \left[(U_1 - U_2) \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_y^2}} + (U_1 - U_2) \left(\cos \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A_y^2}} + \sin \phi \frac{b_x^2}{A_y^2} \right) \right]. \quad (6)$$

$$q'_y(A_x, A_y, \omega, \phi, b_x, b_y, U_x, U_y) = \frac{2}{\pi A_y} \left[(U_1 - U_2) \left(\cos \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A_y^2}} + \sin \phi \frac{b_x}{A_y} \right) + (3U_2 - U_1) \frac{b_y}{A_y} \right]. \quad (7)$$

Таким чином, якщо в процесі роботи автоматичної системи управління при зміні параметрів об'єкту управління в широких межах змінюється зсув фаз $\phi(\omega)$ між вхідними сигналами релейних датчиків, то при перевищенні певного, граничного значення зсуву фаз ϕ (при заданих параметрах нелінійного перетворювача) змінюються послідовності перемикаць вхідних сигналів автомата, що призводить до змін форми керуючого впливу, меж інтегрування (кутів перемикаць) і підінтегральної функції, тобто до зміни виразів коефіцієнтів гармонічної лінеаризації. всередині інтервалів в $0 < \phi \leq \phi_2$ і $\phi_2 < \phi \leq 90^\circ$ вираження коефіцієнтів гармонічної лінеаризації не змінюються.

Для спрощення аналізу системи зобразимо нелінійну частину системи з ЛУП у лінеаризованому вигляді (рис. 3).

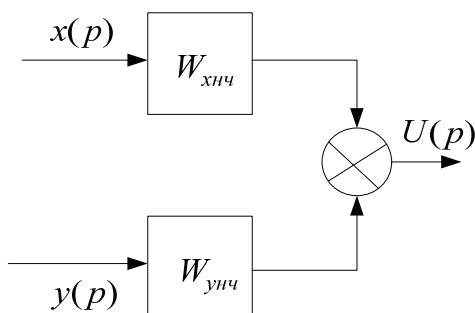


Рис. 3. Еквівалентно лінеаризована схема НЧ

На рис. 3 передатні функції з урахуванням (2) мають вигляд:

$$W_{хнч} = \frac{q'_x}{\omega} p + q_x;$$

$$W_{унч} = \frac{q'_y}{\omega} p + q_y.$$

Таким чином, загальна еквівалентна лінеаризована система матиме вигляд, показаний на рис. 4.

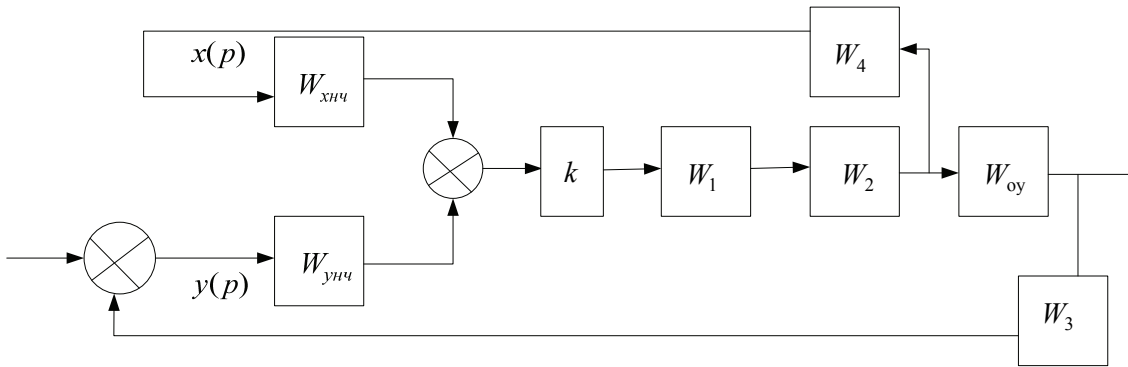


Рис. 4. Загальна лінеаризована еквівалентна схема

Це дозволяє спростити визначення параметрів сигналів, що подаються на вхід релейного елемента. Тоді передатна функція в колі другого релейного елемента дорівнюватиме

$$W(p) = \frac{\frac{K_4}{T_4 p + 1}}{\frac{K_0}{p(T_0 p + 1)} \frac{K_3}{(T_3 + 1)}} = \frac{p(T_0 p + 1)(T_3 p + 1)K_4}{K_0 K_3 (T_4 p + 1)} = \frac{K_4 p [p^2 T_0 T_3 + p(T_0 + K_0 T_3) + 1]}{K_0 K_3 (T_4 p + 1)}. \quad (8)$$

Переходимо в частотну область

$$W(j\omega) = \frac{K_4}{K_0 K_3} \cdot \frac{j\omega [-\omega^2 T_0 T_3 + j\omega(T_0 + K_4 T_3) + 1]}{(j\omega T_4 + 1)}. \quad (9)$$

З цього виразу знайдемо АЧХ кола:

$$A(\omega) = \frac{K_4}{K_0 K_3} \omega \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 (T_0 + K_4 T_3)^2 + (1 - \omega^2 T_0 T_3)^2}}{\sqrt{1^2 + \omega^2 T_4^2}}. \quad (10)$$

та ФЧХ:

$$\phi(\omega) = \text{arctg} \frac{-\omega^3 T_0 T_3 + \omega}{-\omega^2 (T_0 + K_4 T_3)} - \text{arctg} \frac{\omega T_4}{1}. \quad (11)$$

Тоді можна отримати залежність амплітуди A_x від амплітуди A_y

$$A_x = A(\omega) A_y. \quad (12)$$

Отримані співвідношення можна використовувати під час визначення амплітуди і частоти автоколивань графо-аналітичним методом [4].

В роботі були проведені дослідження залежності коефіцієнтів гармонічної лінеаризації від амплітуди сигналу A , коли $\omega = \text{const}$, та від частоти коливань ω , коли $A = \text{const}$, в середовищі MathCad, результати яких показані на рис. 5 у вигляді залежності коефіцієнтів гармонічної лінеаризації $q(A_y, \omega, b_x, b_y, c_x, c_y)$ і $q'(A_y, \omega, b_x, b_y, c_x, c_y)$ від амплітуди сигналу за $\omega = \text{const}$; $A_y = \text{const}$, та від параметрів релейних елементів.

Для подальших досліджень параметрів автоколивань визначимо гармонічну лінеаризацію нелінійної частини розглядуваної системи, включаючи два релейних елемента та ЛУП.

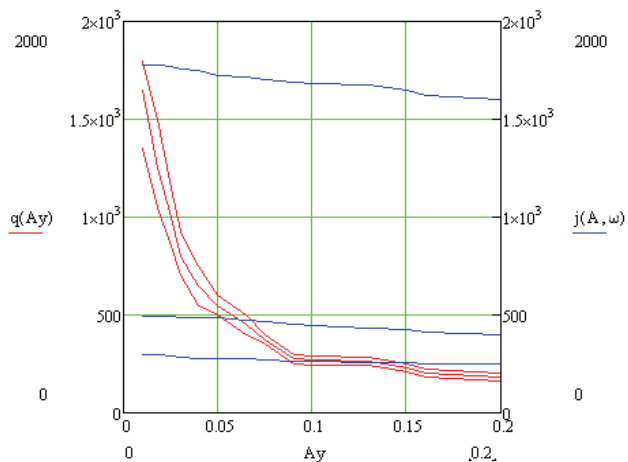


Рис. 5. Залежність коефіцієнтів гармонічної лінеаризації від амплітуди коливань та від частоти коливань

В результаті отримаємо

$$U = \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\pi A_y} \left[(2U_1 - U_2) \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_y^2}} + U_2 \cdot \left(\cos \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A^2(\omega) A_y^2}} + \sin \phi \cdot \frac{b_x}{A(\omega) A_y} \right) \right] + \\ & \left[\frac{2U_2}{\pi A_y} \left(\frac{b_y}{A_y} + \sin \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A^2(\omega) A_y^2}} + \cos \phi \cdot \frac{b_x}{A(\omega) A_y} \right) \frac{P}{\omega} \right] \end{aligned} \right\} y +$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\pi A_y} \left[(U_1 + U_2) \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_y^2}} + (U_1 - U_2) \cdot \left(\cos \phi \sqrt{1 - \frac{b_x^2}{A_x^2}} + \sin \phi \cdot \frac{b_x}{A_x} \right) \right] + \\ & \left[\frac{2\pi}{A_y} \left((U_1 - U_2) \left(\sin \phi \sqrt{1 - \frac{b_y^2}{A_x^2}} + \cos \phi \cdot \frac{b_x}{A_x} \right) + (3U_2 - U_1) \frac{b_y}{A_y} \right) \frac{P}{\omega} \right] \end{aligned} \right\} x. \quad (13)$$

Використання частотних характеристик для аналізу стійкості нелінійних систем має переваги, тому що дозволяє об'єднати математичний апарат лінійних та нелінійних систем. Слід відмітити, що для зменшення складності задачі знаходження амплітуди і частоти періодичного рішення, але без врахування параметричних збурень, пропонується використовувати графоаналітичний метод розв'язання рівняння системи. Але він дозволяє отримати лише наближені значення параметрів автоколиваний без врахування параметричних збурень в системі. Тому в цій статті для отримання певних результатів з аналізу стійкості систем з ЛУП отримані аналітичні співвідношення для визначення частотних характеристик системи, що розглядається. Для цього отримано характеристичне рівняння для першого кола, яке має вигляд

$$p(T_0 p + 1)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k_0 k_1 k_2 k_3 \left(q + \frac{q' p}{\omega} \right) = 0. \quad (14)$$

Для другого кола характеристичне рівняння має вигляд

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4 p + 1) + k_1 k_2 k_4 \left(q + \frac{q' p}{\omega} \right) = 0. \quad (15)$$

Згідно з вищерозглянутим методом, припустимо, що $p = j\omega$, і виділивши дійсну та уявну частину в цьому рівнянні, отримаємо:

$$X(A_y, \omega) + jY(A_y, \omega) = 0. \quad (16)$$

В розглянутому випадку коли $\tau = 0$ дійсна та уявна частини будуть визначатись таким чином:

$$X(A_y, \omega) = [T_0 T_1 (T_2 + T_3) + (T_0 - T_1) T_2 T_3] \omega^4 - [(T_0 - T_1) - (T_2 + T_3)] \omega^2 + k_0 k_1 k_2 k_3 q; \quad (17)$$

$$Y(A_y, \omega) = T_0 T_1 T_2 T_3 \omega^5 - [T_0 T_1 + (T_0 - T_1)(T_2 + T_3) - T_2 T_3] \omega^3 + k_0 k_1 k_2 k_3 q' - \omega. \quad (18)$$

Звичайно для визначення амплітуди та частоти автоколиваний будують низку характеристичних кривих $X(\omega) + jY(\omega)$ для різних значень змінних та графічною інтерполяцією визначають значення A_y і ω , що задовольняють умовам $x = 0$; $y = 0$. Знайдене значення частоти, за якого характеристична крива $X(\omega) + jY(\omega) = L(j\omega)$ проходить через початок координат комплексної площини, визначається як частота автоколиваний (якщо знайдене періодичне рішення стійке); амплітуда, за якої крива $L(j\omega)$ проходить через початок координат, буде відповідати амплітуді автоколиваний. Тобто отриманий результат має низьку точність.

В процесі моделювання автоматичних систем з ЛУП у разі впливу параметричних збурень запропонованим методом, отримані вирази (17), (18) для дійсної та уявної частини характеристичного рівняння в загальному вигляді, які залежать крім параметрів вхідних сигналів A_x, A_y, ω , ще й від параметричних збурень, представлених змінюваних в часі параметрами b_x, b_y, U_1, U_2 .

Висновок

За допомогою методології моделювання поведінки нелінійної нестационарної системи, запропонованої в статті, розроблений метод аналізу стійкості автоматичних систем з логічними управляючими пристроями, який дозволяє визначити границі областей стійкості систем у просторі параметрів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ципкин Я. З. Релейные автоматические системы / Я. З. Ципкин. — М. : Наука, 1974. — 576 с.
2. Водічев В. А. Електромеханічні системи автоматизації з параметричним зворотним зв'язком / В. А. Водічев // Електротехнічні та комп'ютерні системи : Наук.-техн. журнал ; К. : Техніка. — 2011. — № 3 (79). — С. 207—208.
3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Наука, 1981. — 568 с.
4. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления / Е. П. Попов. — М. : Наука, 1979. — 255 с.
5. Мокін Б. І. Математичні моделі робастної стійкості та чутливості нелінійних систем / Б. І. Мокін, С. В. Юхимчук. — Вінниця. : Універсум-Вінниця, 1970. — 567 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 2.12.2015

Юхимчук Марія Сергіївна — канд. техн. наук, старший викладач кафедри комп'ютерних систем управління;

Деркач Анна Ігорівна — студентка факультету комп'ютерних систем і автоматики, e-mail: derkachanika@gmail.com.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

M. S. Yukhymchuk¹
A. I. Derkach¹

Development of Mathematical Analysis Models of Impact on Stability of Automatic Systems with Logical Managing Devices

¹ Vinnytsia National Technical University

There have been presented necessary mathematical models for the study, design and efficient use of systems with logical control laws that are discussed in this article that allow us to determine the dependence modes, the structure of the system parameters of relay elements parametric perturbations that significantly can change parameters oscillation and influence stability systems.

Keywords: mathematical model, perturbation linearization, nonlinear system control.

Yukhymchuk Mariia S. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor, Senior Lecturer of the Chair of Computer Control Systems;

Derkach Anna I. — Student of the Department of Computer Systems and Automation, e-mail: derkachanika@gmail.com

М. С. Юхимчук¹
А. И. Деркач¹

Разработка математической модели анализа влияния параметрических возмущений на устойчивость автоматических систем с логическим управляющим устройством

¹Вінницький національний технічний університет

Для исследования, проектирования и использования рассматриваемых в статье систем с логическими законами управления предложены необходимые математические модели, позволяющие определить зависимость режимов работы от структуры системы, параметров релейных элементов, параметрических возмущений, которые существенно могут изменять параметры автоколебаний и влиять на устойчивость систем.

Ключевые слова: математическая модель, возмущение, линеаризация, нелинейная система, управление.

Юхимчук Марія Сергеевна — канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры компьютерных систем управления;

Деркач Анна Игоревна — студент факультета компьютерных систем и автоматики, e-mail: derkachanika@gmail.com